Bengt Lindberg **Lösningar till hemuppgifter för D och E, No. 3**
DN1241, DN1243, 100820

1. Oändligt integrationsintervall bemästras med svanskapning.

$$\int_N^\infty \frac{6}{x^7+2x+1}dx < \int_N^\infty \frac{6}{x^7}dx = \frac{6}{-6x^6}|_N^\infty = \frac{1}{N^6}$$

   Välj nu N så

$$N^{-6} < \text{toleransen}$$

   Med önskat totalfel mindre än 0.5×10^{-6} väljer vi toleransen 0.25×10^{-6} och får $N \geq 12.6$. I Matlab skriver vi

```
function f=integrand1(x)
f=6./(x.^7+2*x+1);
```

   och anropar quad enligt

```
I=quad(@integrand1,0,12.6,1.E-7)
```

2. Låt dr_h beteckna den numeriska approximationen beräknad med vår metod med steglängden h, och dr står för derivatans exakta värde. Då gäller

$$dr_h = dr + ch^p + ...$$

   Med steglängderna $H = 0.05$, $2H = 0.1$

$$dr_{2H} = dr + c(2H)^p + ...$$

$$dr_H = dr + c(H)^p + ...$$

   Sätt $dr_{0.001} = dr$. Felet i det sista värdet i tabellen är så litet att det kan försummas jämfört med felen i de två första värdena i tabellen! Bilda kvoten

$$\frac{dr_{2H} - dr}{dr_H - dr} = \frac{(2H)^p}{H^p} = 2^p$$

   Med tabellvärdena insatta får vi

$$\frac{0.008012}{0.001007} = 2^p$$

   Vänsterledet är ca 8 så $p = 3$. Approximationen är noggrann av ordningen 3.

3. För en numerisk metod som genererar en talföljd

$$x_0, x_1, x_2, \dots x_n$$

   som konvergerar mot en rot α till ekvationen $f(x) = 0$ studerar vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^r} = C$$

   C är den asymptotiska felkonstanten och r metodens konvergensordning.

   I tabellerna uppskattar vi $|x_n - \alpha|$ med $|dx_n|$ och testar med olika r-värden för att se vilket som eventuellt stämmer.

   För metod 1 får vi kvoterna $dx_{n+1}/dx_n \approx 0.25$. Metod 1 har konvergensordning 1 och asymptotisk felkonstant 0.25.

   För metod 2 blir $dx_{n+1}/{dx_n}^2 \approx 0.5$, så metoden har konvergensordning 2 och asymptotisk felkonstant 0.5.