



Bayes metod att hantera osäkerhet

Stefan Arnborg, KTH

Antiken

Renässansen

Nittionhundratalet

Framtiden

Att räkna med osäkerhet....

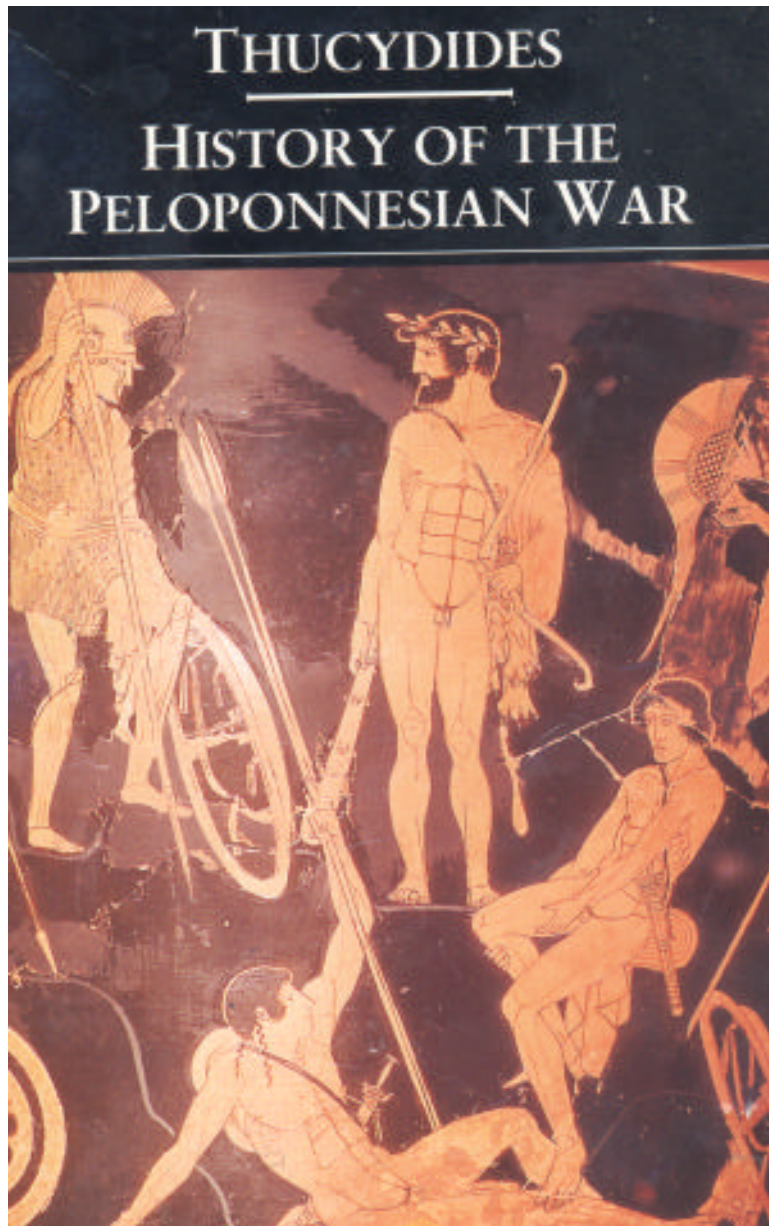
- Datorutvecklingen har mycket handlat om hur datorer ska räkna säkert och tillförlitligt. Hur kan man göra intelligenta system som hanterar information som är osäker, på bästa möjliga sätt??

Exempel på osäkerhetshantering 'Uncertainty Management'

- Tolka finansiell information, förutspå aktiekurser och fatta beslut i företag
- Tolka felrapporter och förutse problem i komplexa tekniska system
- Diagnosticera och behandla sjukdomar
- Situationsuppfattning i militära operationer
- Naturvetenskaplig och medicinsk forskning - stora datamängder, felkällor, mm.

Disposition

- Kort historik, grundbegrepp
- Några aspekter av osäkerhetshantering:
 - Modellens realism och priorinformation
 - Kausalitet och confounders
 - Rationalitetskriterier, koherens
 - Modeller för inre världar, semeiotik
 - Spelsituationer, rekursiv Bayesiansk modellering



Thukydides

- Deltog i och skildrade Peloponnesiska kriget
- Första moderna historikern
- Hur påverkar våra föreställningar om andra vårt handlande?
- Konflikten en logisk konsekvens av deltagarnas (van)föreställningar om varandras mål och resurser.

Myntsystemet och marknader

- En universell mätare av materiella värden
- En resurs i kriget
- Den osynliga handen
- Verktyg i statistik och beslutsteori



Sun Zi

其所居者易利也
眾樹動者來也
眾草多障者疑也
鳥起者伏也
獸駭者覆也
塵高而銳者車來也
卑而廣者從來也
散而條幸者樵探也
少而往來者營軍也

Om han upprättar en bas på ett lättillgängligt ställe är det för att vinna andra fördelar av det.

Om det rör sig i skogen är han på väg.

Många uppsatta hinder på öppen mark betyder att fienden vill vilseleda.

När fåglar lättar ligger fienden i bakhåll.

Uppskrämda djur betyder att fienden i rörelse.

När dammet yr i höga och tydliga strängar är det vagnar som är på väg.

När dammet ligger lågt och jämnt är det fotsoldater som är på väg.

När dammet är utspritt i tunna strängar samlar fienden ved.

När dammet är tunt och yr kors och tvärs slår fienden läger.

Aristoteles, ca 384 - 321 BC

Deduktion:

Kunskap från säkra fakta,
bevis, slutsatsdragning

Inferens, induktion: Kunskap
från osäkra fakta, lära av
erfarenhet

Beslutsteori:

Kunskap om handlings-
alternativ ur nytta och osäkra
fakta, tillämpat på livsval.

(Nichomachos Etik)



Bernoulli, (1654-1705).

Indifferensprincipen

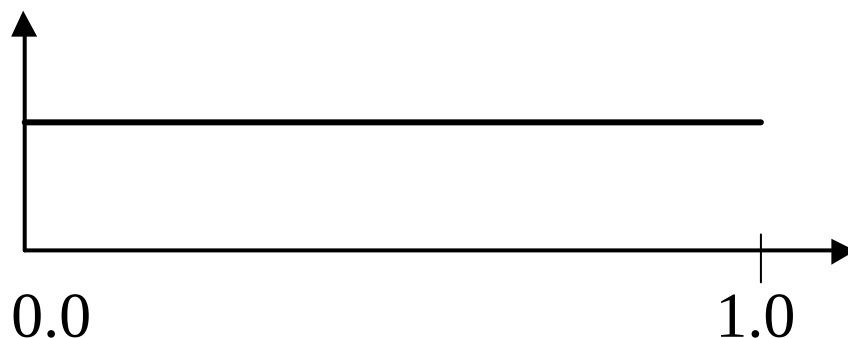
- Sannolikhetssteori - beslutstöd för hasardspel
- Bestäm sannolikheter för händelser i utfallsrum
- Om N olika varandra uteslutande och uttömmande fall inte kan särskiljas har de alla sannolikheten $1/N$.
- Mynt: $1/2$ - Tärning: $1/6$ - Kort: $1/52$

Thomas Bayes (1703-1762)

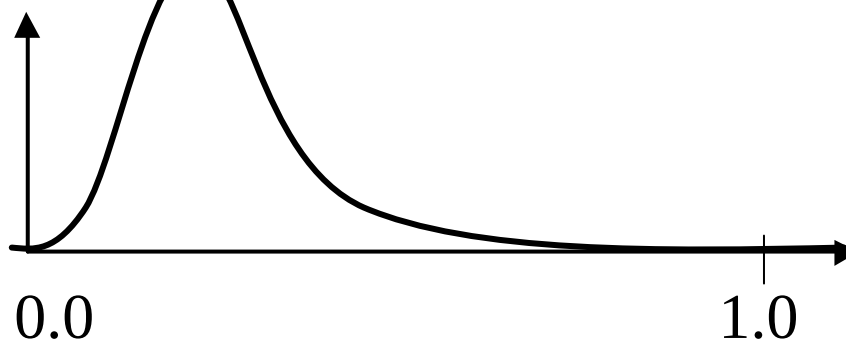
- Om vi misstänker att myntet är ‘snett’, kan vi bekräfta detta genom att testa det? - invertering av sannolikhet (inverse probability).
- Prior: Före experimentet är sannolikheten likformigt fördelad mellan 0 och 1.
- Posterior: Efter försöket beskrivs sannolikheten av en ‘betafördelning’.

Prior - posterior

- TESTRESULTAT: 000100001001
- Före experimentet : varje p 'lika troligt',
likformig prior :



- Efter experimentet: Data har förändrat prior till posterior



Bayes faktor

- Val mellan två hypoteser, $H1$ och $H2$, givet experimentdata D och sannolikhetsmodell

$$\frac{P(H1|D)}{P(H2|D)} = \frac{P(D|H1)}{P(D|H2)} \frac{P(H1)}{P(H2)}$$

Posterior odds Bayes faktor prior odds

Bayes faktor 20 är
signifikant,
200 är stark

Hierarkiska modeller

- Modell kontinuerlig:

$$H: P(x \in X) = \int_X f(x) dx$$

- Modell parametriserad:

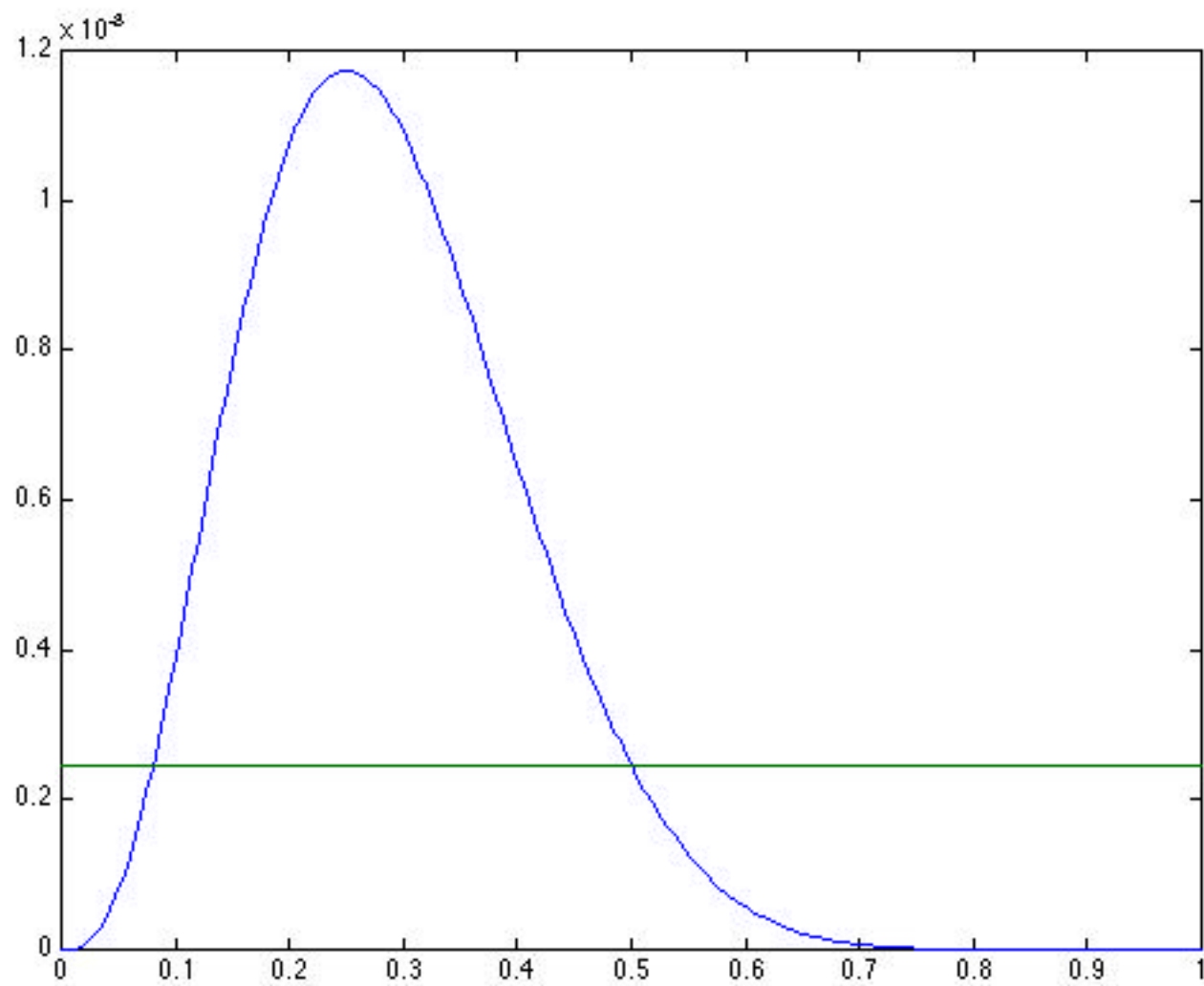
$$Hl: f(x | l), l \in \Lambda$$

- Modell hierarkisk:

priorfördelning $f(l)$ för l ,

$$H1: f(l | x) \sim f(x | l) f(l),$$

$$P(D|H1) = \int f(D|l) f(l) dl = \prod_i f(d_i|l) f(l) dl$$



Bayes factor - ratio between areas

Bayes' exempel

- Resultat D av test: s krona, f klave, $n=s+f$
- H_0 : Myntet är balanserat, $P(D|H_0)=2^{-n}$
- H_p : Myntet ger krona med sannolikhet p
 $P(D|H_p) = p^s (1-p)^f$
- H_1 : H_p med likformig prior för p , hierarkisk

$$P(D|H_1) = \int P(D|H_p) dp = (s! f!)/(n+1)!$$

Laplace

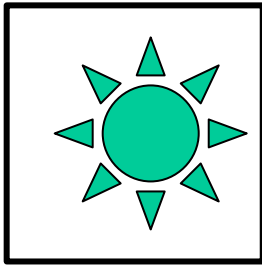
- Vad är sannolikheten för att solen ska gå upp i morgon?
- Vi vet att solen gått upp varje dag sedan jorden skapades, N gånger.
- Vi antar att sannolikheten är likformigt fördelad mellan 0 och 1 .
- Svaret är $(N+1)/(N+2)$.

Vilka fel gjorde Laplace?

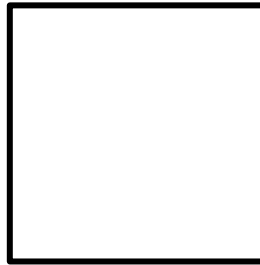
- Laplace method (rule of succession) framhålls som felaktig och förkastlig i alla läroböcker i statistik!
- Han förklarade inte vilka antaganden han gjort
 - Antagandet om likformig prior och p konstant
 - Att använda bibeln som auktoritet för att bestämma jordens ålder
- Vikten av att forskare kommunicerar klart och tydligt!

Modellens realism

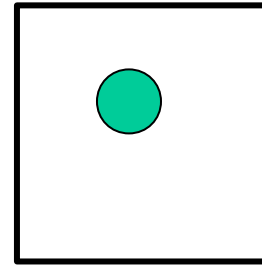
- H1: Sovjet anfaller över nordpolen
- H2: Himlen är klar



H1



H2

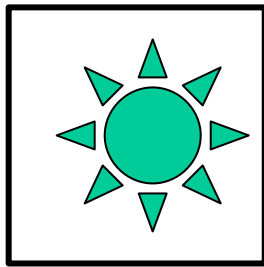


D

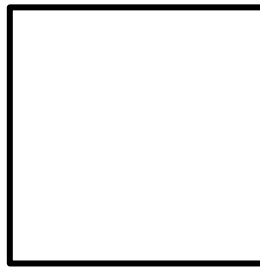
$$\frac{P(D|H1)}{P(D|H2)} \gg 1$$

Modellens prior

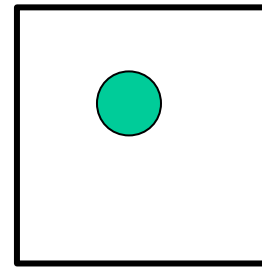
- H1: Sovjet anfaller över nordpolen
- H2: Himlen är klar
- Även om Bayes faktor för H1 är stor, kanske priorsannolikheten är mycket liten



H1



H2



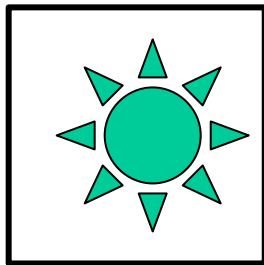
D

$$\frac{P(D|H1)}{P(D|H2)} \gg 1$$

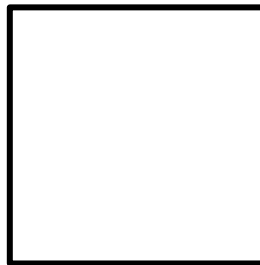
$$\frac{P(H1)}{P(H2)} \ll 1$$

Modellens realism

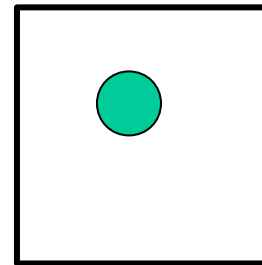
- H1: Sovjet anfaller över nordpolen
- H2: Himlen är klar
- H3: Fåglar, meteoror, tekniskt krångel



H1



H2



H3

$$\frac{P(D|H3)}{P(D|H1)} \gg 1$$

Försäkringsparadoxen

- Varför kan försäkringar tecknas när försäkringsbolaget måste ha förväntad vinst och kunderna därmed måste få förväntad förlust?
- Svar: Bolagets nyttofunktion är i stort sett linjär i det ekonomiska spannet för en enskild försäkring - men för försäkringstagaren är en risk på 0.1% att förlora 1 MSEK mycket värre än en säker förlust på 1 KSEK.

Experiment vs observation

- Finns samband mellan behandling och resultat?
- Finns ett orsakssamband? -
eller en bakväg (confounder)?
- Kan vi avgöra om patienten hade tillfrisknat med
en annan behandling?
- Kan vi avgöra vilken behandling som är bäst?

Simpson's Paradox (~1951)

	R	NR	Tot	Andel tillfrisknat
T	200	200	400	50%
NT	160	240	400	40%

För 800 patienter, säger tabellen hur många som behandlats (T), inte behandlats (NT), tillfrisknat (R) eller ej (NR).

En större andel tillfrisknar bland de som fått behandling. Betyder det att behandlingen är bra? Vi vet att sjukdomen drabbar män och kvinnor olika. Därför kan det vara bra att dela upp tabellen på kön--->

Tillfrisknande för män

	R	NR	Tot	Andel tillfrisknat
T	180	120	300	60%
NT	70	30	100	70%

Bland männen tillfrisknar en större andel av de som inte fått behandlingen. Den verkar vara skadlig för män....

Borde behandlingen därför vara ännu bättre för kvinnor? --->

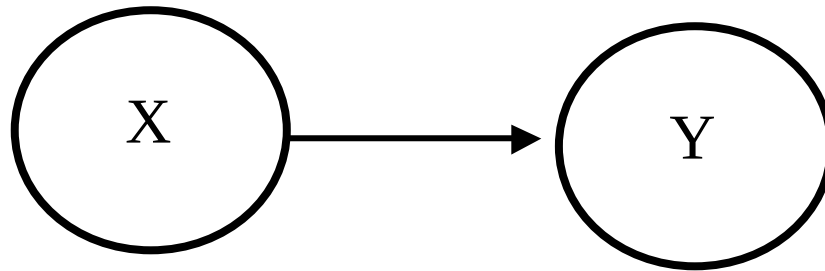
Tillfrisknande för kvinnor

	R	NR	Tot	Andel tillfrisknat
T	20	80	100	20%
NT	90	210	300	30%

Tyvärr, behandlingen verkar vara skadlig både för män och för kvinnor.

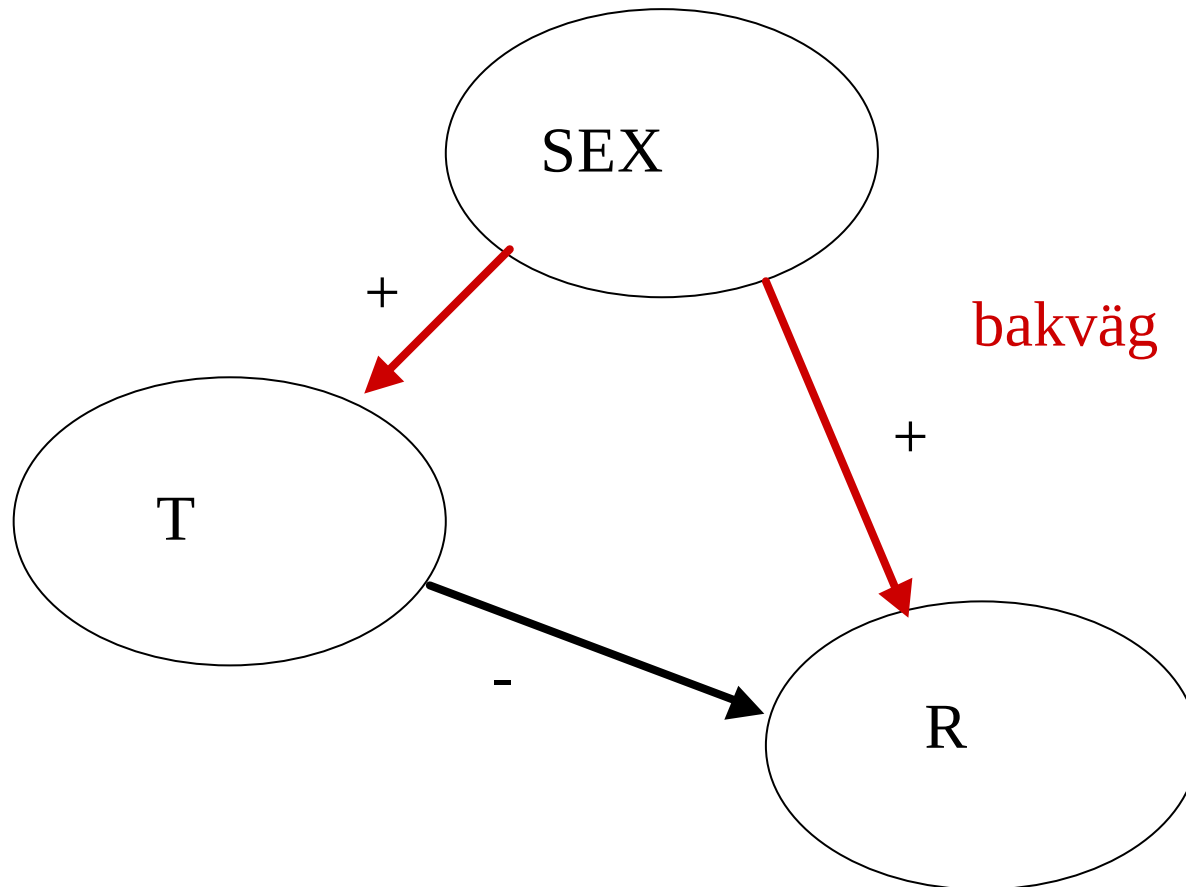
Är behandlingen bara bra för patienter vars kön vi inte vet?

Orsaksgrafer-Bayesianska nätverk



- Statistisk graf: pil betyder statistiskt samband
$$f(y) = f(y|x) f(x)$$
- Orsaksgraf: pil betyder orsakssamband:
$$y \leftarrow F(x, \epsilon)$$

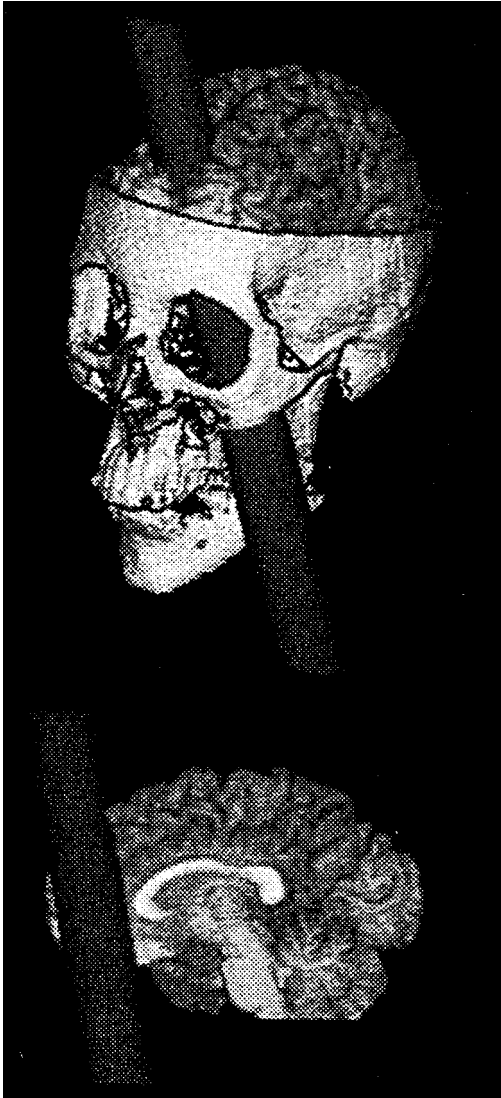
Confounders i orsaksgraf



Resultat från observationsstudier kan vara missvisande pga confounders.
Randomisering eliminerar kända och okända confounders

Men randomiserade experiment är dyra och vanligen o genomförbara!!

Phineas Gage's olycka- start för modern hjärnforskning



- Dispositiva bilder genereras och överförs mellan 'centra'
- Centra för planering och målfokusering
- Känslor som målfunktion - optimeringskriterium



C. S. Peirce (1839 - 1914).
Amerikas störste filosof

Pragmatism: Hur utvecklas
vår förståelse av naturen?
Hur ska forskning bedrivas?

Semeiotik: Mening skapas av
tecken som överförs inom och
mellan individer - ingen
'precis omvärldsbild' inom en
individ. Processen styrs
känslomässigt.

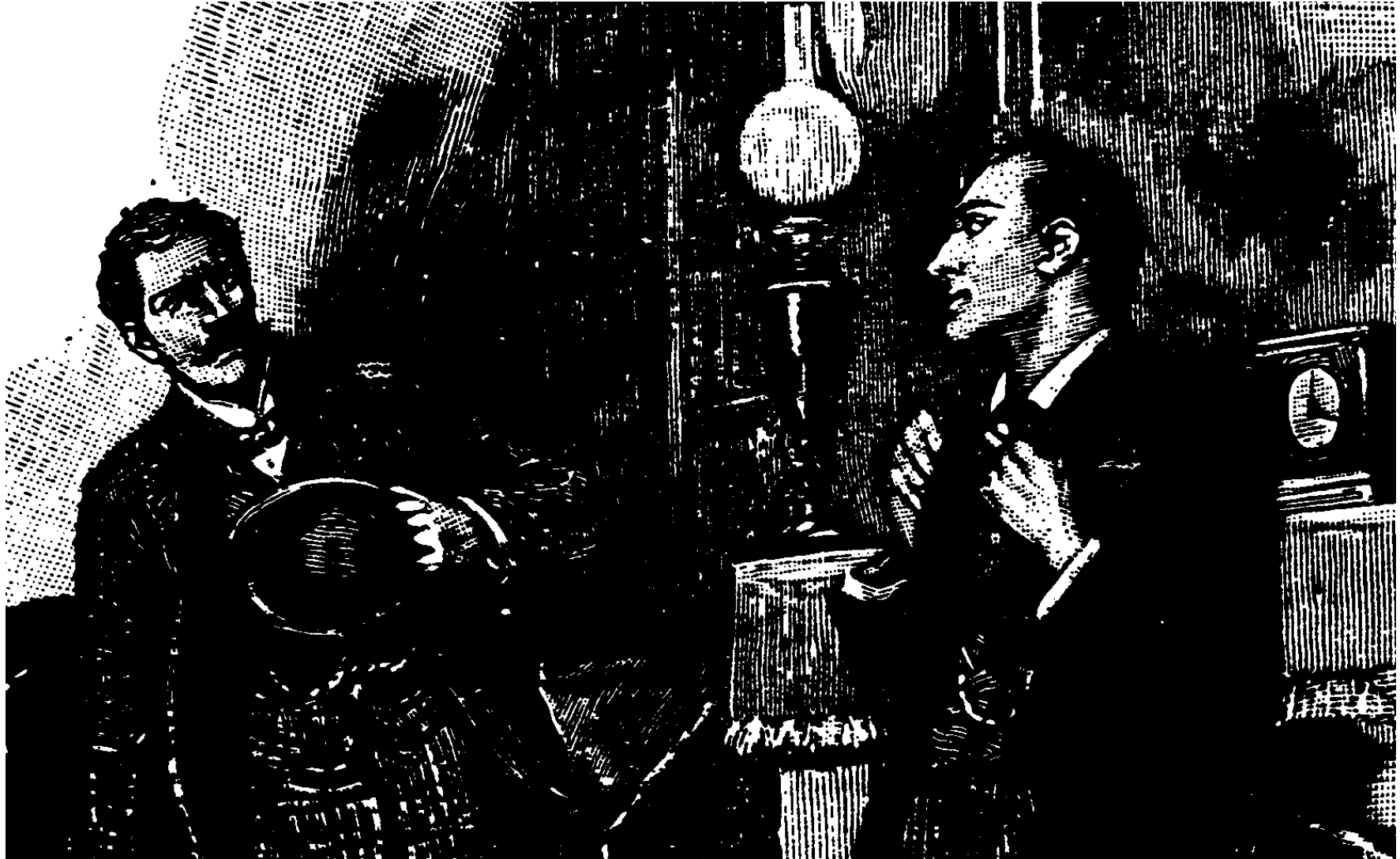
The Sign of Three
Umberto Eco, Thomas Sebeok
Indiana University Press, 1983.

Love, Chance and Logic:
C.S. Peirce, 1923

C. S. Peirce (1839 - 1914).

A person is not absolutely an individual. His thoughts are what he is 'saying to himself', that is, saying to that other self that is coming into life in the flow of time. When one reasons it is that critical self that one is trying to persuade. It is a necessity of Logic that every logical evolution of thought should be dialogic.
Every thought is a sign.

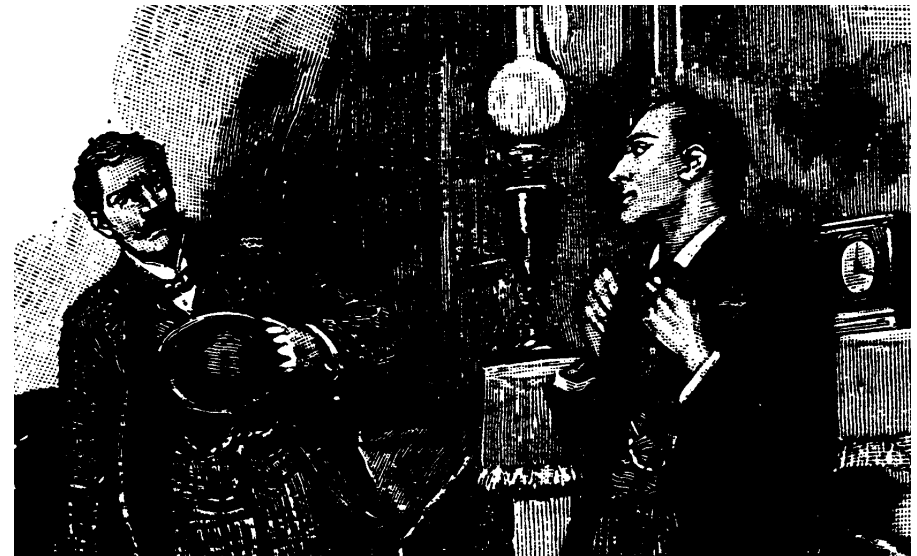
Sherlock Holmes: inferens i vardagslivet



Sherlock Holmes: inferens i vardagslivet

Deltagande individers mål och värderingar är viktiga, liksom individernas informationsläge och tro om andras mål och värderingar. Sherlock drar hisnande korrekta slutsatser på fragmentarisk information, men allokerar också sina resurser för att samla in kritisk information.

Teckenspelet är också ägnat att imponera på - och påverka - klienter, Watson och läsaren



Objektiv sannolikhet

(Fisher, von Mises, Neyman, Pearson)

- Sannolikheter relevanta för resultat av experiment som kan upprepas - sannolikheten är objektivt bestämd, opåverkad av observationer.
- Vi kan däremot ställa upp en hypotes - myntet är balanserat - och testa den på en viss nivå
- Problem: resultatet beroende av försöksplan, kriterier för reproducerbarhet. Att man ej kan förkasta en hypotes innebär inte att man accepterar den, och förkastande av en hypotes innebär inte att man accepterar en annan.

Bayesianism

(de Finetti, Keynes, Jeffrey, Ramsey,
Savage, Lindley, Cheeseman...)

- Normativt anspråk:
**ALL OSÄKERHET MÅSTE BESKRIVAS
MED SANNOLIKHETER**
- eller något därmed ekvivalent.
- **SANNOLIKHET ÄR SUBJEKTIV**
- uttrycker information individen besitter
- Formulerades efter många filosofiska
utvikningar. Fortfarande kontroversiell fråga.

Preface

(de Finetti, Theory of Probability)

Is it possible that in just a few lines I can achieve what I failed to achieve in my many books and articles? Surely not. Nevertheless, this preface affords me the opportunity, and I shall make the attempt. It may be that misunderstandings which persist in the face of refutations dispersed or scattered over some hundreds of pages can be resolved once and for all if all the arguments are pre-emptively piled up against them.

My thesis, paradoxically, and a little provocatively, but nonetheless genuinely, is simply this:

PROBABILITY DOES NOT EXIST.

The abandonment of superstitious beliefs about the existence of Phlogiston, the Cosmic Ether, Absolute Space and Time, . . . , or Fairies and Witches, was an essential step along the road to scientific thinking. Probability, too, if regarded as something endowed with some kind of objective existence, is no less a misleading misconception, an illusory attempt to exteriorize or materialize our true probabilistic beliefs.

Jaynes

Koherens: Osäkerhet mätbar i pengar = vadslagningsodds

- Är jag beredd att satsa på odds 3 för A?
Då är min sannolikhet för A minst $1/3$
- Dogma of precision: Det finns alltid odds jag accepterar både som spelare och som bookie
- En uppsättning odds som i någon kombination ger säker vinst eller säker förlust motsvarar en *irrationell* bedömning.
- *Rationella* bedömningar är ekvivalenta med sannolikhetsräkning

Koherens: Osäkerhet mätbar i pengar = vadslagningsodds

- Är jag också beredd att ta odds 3 för A som bookie? Då är min sannolikhet för A exakt $1/3$!
- Dogma of precision: Det finns alltid odds jag accepterar både som spelare och som bookie
- Förkastas av tex Walley och Berger. Ett gap mellan odds jag vill satsa på och odds jag vill ge som bookie leder till *Robust Bayesianism* eller *Dempster-Shafer-teori*.
- Brister i osäkerhetsmetodik kan analyseras med koherensbegreppet

Peter, Paul och Mary söker jobb

- Chefen singlar slant för att välja man/kvinna.
- Anställer Mary vid krona. Väljer på okänt sätt mellan Peter och Paul vid klave.
- En förlorare **avslöjas**, vald med slantsingling.
- Nästa förlorare **avslöjas** senare (jfr Miss World Contest).

Transferable Belief Model (P Smets)

- När protkollet är känt, indifferensprincipen:
 $(P_e, P_a, M_a) = (1/4, 1/4, 1/2)$
- singla, (man/kvinna), välj Peter/Paul vid klave.
- Första förlorare **avslöjad**, vald med singling:
TBM : $(0, 1/2, 1/2)$ $(1/2, 0, 1/2)$ $(1/2, 1/2, 0)$
Bayes: $(0, 1/3, 2/3)$ $(1/3, 0, 2/3)$ $(1/2, 1/2, 0)$
- Nästa förlorare **avslöjas**: $(0,0,1)$ $(0,1,0)$ $(1,0,0)$
- **Men nu dyker en skum bookie upp....**

- Bookie: du får 1.01 om Mary vinner,
du betalar 1 annars , OK?
OK, jag tjänar $(1.01-1.0)/2=0.005$!
- Bookie: Men betala 0.11 så behöver du inte
betala om Mary blir första förlorare, OK?
OK, *jag betalar 0.11* och undviker förlust 0.25!
- Uppllysning: **Om** Mary förlorade, *förlust 0.11*
Annars fortsatt:
- Bookie: Du får 0.01 om vi glömmet vadet, OK?
OK, *jag får 0.01*, väntad vinst bara 0.005!
Förlust 0.10!

Vad gick fel?

- Protokollet känt

$(P_e, P_a, M_a) = (1/4, 1/4, 1/2)$

- slantsingling, val.
- Första förlorare avslöjas:

TBM : $(0, 1/2, 1/2) \quad (1/2, 0, 1/2) \quad (1/2, 1/2, 0)$

Bayes: $(0, 1/3, 2/3) \quad (1/3, 0, 2/3) \quad (1/2, 1/2, 0)$

- TBM:s sannolikhetsrevision orsakar inkoherens
- Cox (1946), Freedman, Purvis(1969) Arnborg, Sjödin (2000):

All icke-Bayesiansk uppdatering inkoherent

Bayesiansk Beslutsteori (Savage)

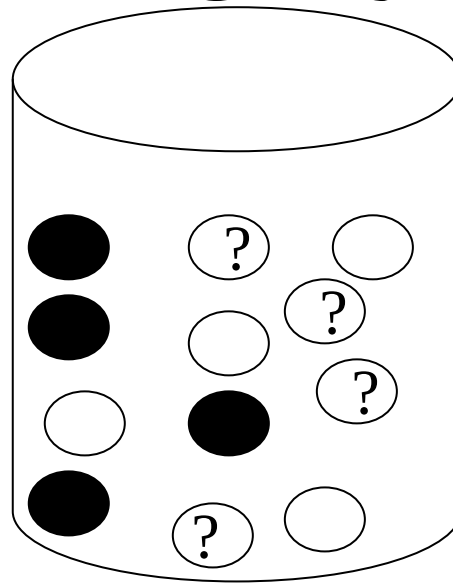
- Möjliga världar $W=(w_1, w_2, \dots)$
- Handlingsalternativ $A=(a_1, a_2, \dots)$
- Nyttan av värld $w_i : u_i$
- För varje a_i , en sannolikhetsfördelning $P=p_{ij}$ över de möjliga världarna.
- Bayesianskt beslutsfattande:
Maximera $\sum_j p_{ij} u_j$ över handlingsalternativ (i)

Bayesiansk Beslutsteori (forts)

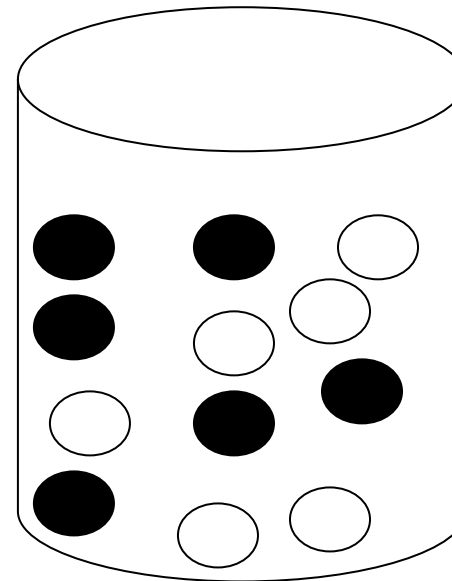
- Finns nytta?
- Finns sannolikheter?
- Ellsbergs paradox: Handlar människor ‘Bayesianskt’? Bör dom?
- Försäkringsparadoxen
- Kan/bör man beskriva kognitiva fenomen med sannolikheter? (jfr Fuzzy logic, neuronnät, mm)

Ellsberg's Paradox: Ambiguity Avoidance

Urna A innehåller
4 vita och 4 svarta
kulor, och 4 av
okänd färg (svart
eller vit)



Urna B
innehåller
6 vita och
6 svarta kulor



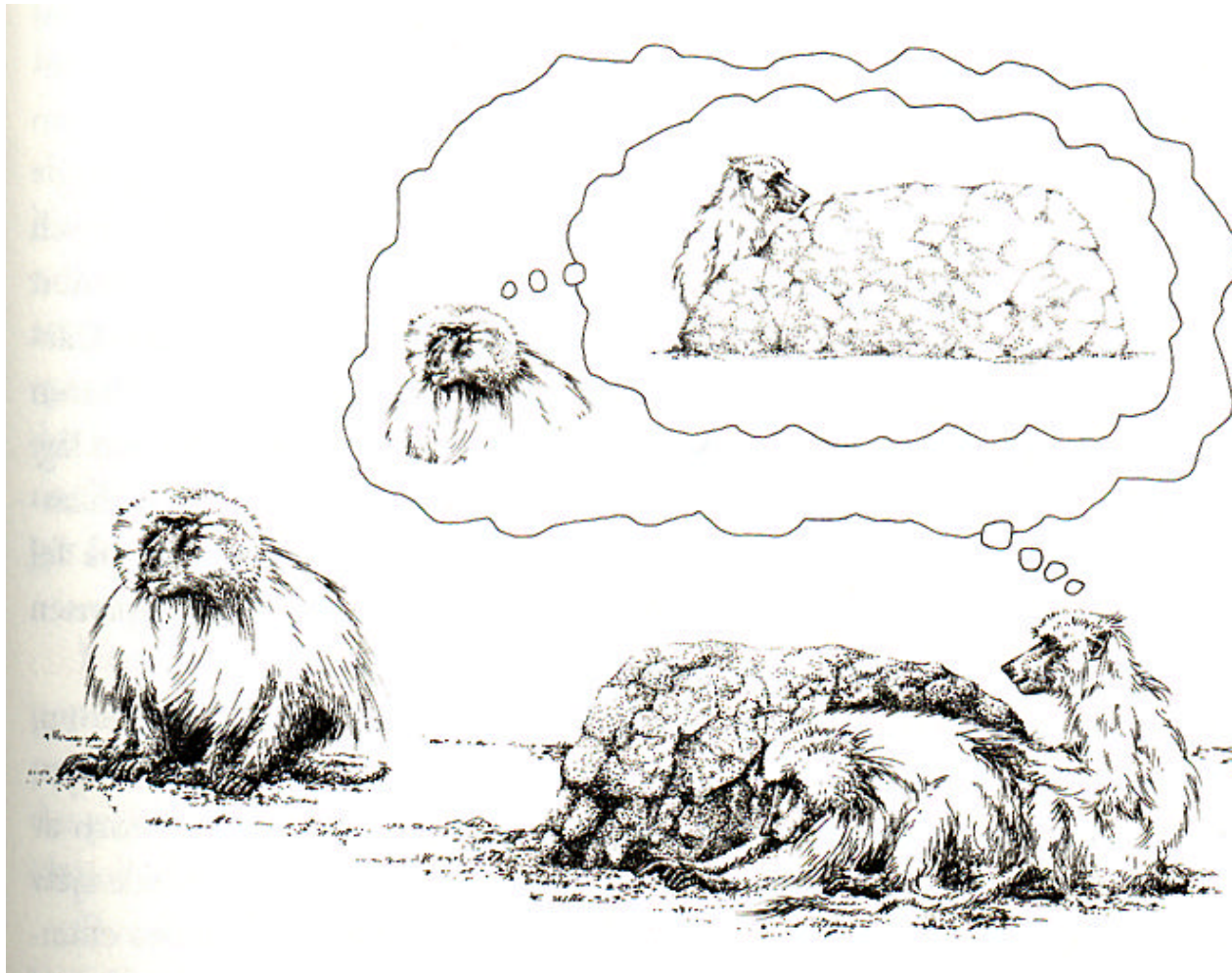
Du får en krona om du drar en svart kula. Ur vilken urna vill du dra den?

En precis Bayesian bör först anta hur ?-kulorna är färgade och sedan svara. Men en **majoritet föredrar urna B** även om svart byts mot vit

Robust Bayes: Flera sannolikheter

- Urna A: sannolikheten för svart är endera av $4/12, 5/12, 6/12, \dots 8/12$.
- Urna B: sannolikheten är exakt $1/2$
- *Vaghetsundvikande* individ (majoritet) föredrar vinst $1/2$ framför vinst mellan $1/3$ och $2/3$.
- En *riskbenägen* individ (minoritet) gör tvärtom.
- *Bayesianer* finns också (minoritet).
- Experiment kan tolkas som att alla rationella individer är 'Robusta Bayesianer'.

**Är sannolikheter rätt
verktyg att beskriva
kognitiva fenomen:
Kamp mellan viljor,
spel och krig,
vilseledning,
samarbete-konkurrens,
mm?**



Peter Gärdenfors: Hur Homo blev Sapiens

Terrorbalans, fångens dilemma

A- anfall
F- försvar

Payoff-matris:

Jag

	F	A
F	0	-10
A	-1	-5

Opponent

Stabila lägen:

F-F

A-A

Men vad gör opponenter?

Opponenten antas agera
rationellt enligt sin egen
payoff-matris - men den
känner vi inte!!

Terrorbalans, fångens dilemma

Nash-jämvikt

A- anfall
F- försvar

Payoff-matris:

Jag

	F	A
F	0, 0	-10, 10
A	-1, 1	-5, 5

Opponent

Nash-jämvikt:

A-A

ANTAG att vi känner
opponentens payoff

Nollsummespel: optimal
(slump)strategi finns

Nash-jämvikt: Ingen part
kan ensidigt förbättra sin
situation.

Terrorbalans, fångens dilemma

Nash-jämvikt

A- anfall
F- försvar

Payoff-matris:

Jag

	F	A
F	0, 0	-10, 0
A	0, -10	-5, -5

Opponent

Nash-jämvikt:

F-F

A-A

Vilket alternativ
'rätt'? Stor känslighet
för payoff-matrisen -
som vi inte vet!

Terrorbalans, fångens dilemma

Nash-jämvikt

A- anfall
F- försvar

Payoff-matris:

		Opponent	
		F	A
Jag	F	0, 0	-10, 1
	A	1, -10	-5, -5

Nash-jämvikt:

~~F-F~~
A-A

Vilket alternativ
'rätt'? Finns det
rationella skäl att
ändå välja F-F??

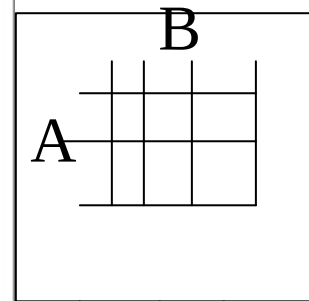
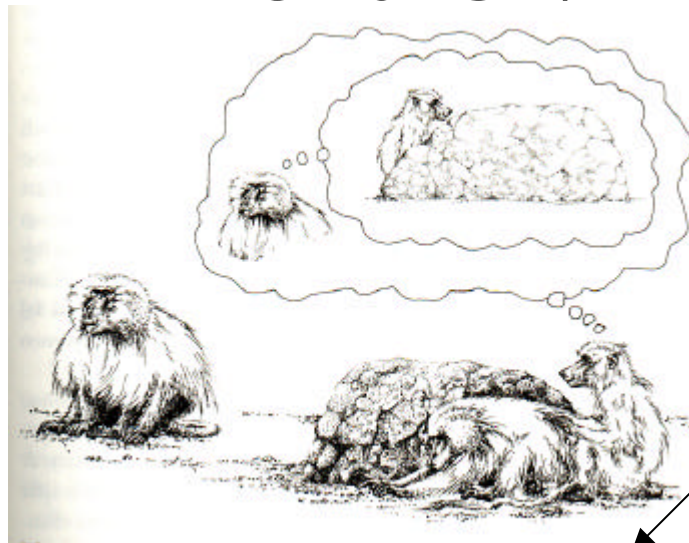
Rekursiv Bayesianisk modellering

- Kännedom om payoff-matrisen och klassisk spelteori förutsätter ‘Common Knowledge’: Jag vet min matris, jag vet opponentens, jag vet att opponenten vet min matris, och jag vet att opponenten vet att jag vet hans matris
- Common knowledge kan inte uppstå genom ändligt utbyte av information!! (Halpern-Moses)

Rekursiv Bayesianisk modellering (Gmytrasiewicz, Durfee, m fl)

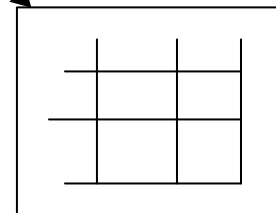
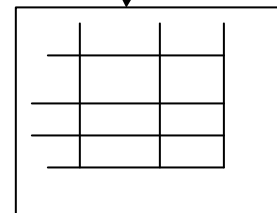
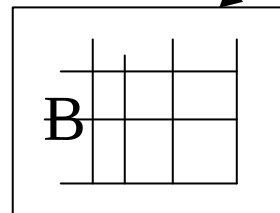
- Jag ansätter min payoff-matris.
- Jag ansätter en fördelning av de andras payoff-matriser
- Jag ansätter fördelningar av andras fördelningar av de andras payoffmatriser
-
- Avslutas med ‘no information states’ - där det är meningslöst att fortsätta

Rekursiv Bayesiansk Modellering

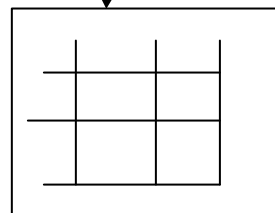
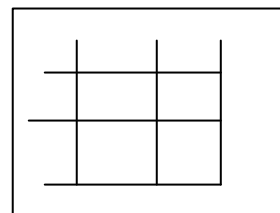


A:s modell av
sin situation

p1 p2 p3



A:s modeller av
B:s situation



A:s modeller av B:s
modell av A:s situation

.....

Rekursiv Bayesianisk Modellering

- *Observation* av andra agents handlingar ger kunskap om dessas modeller.
- En *fråga* antyder brist på information (eller vilseledning).
- Ett *svar* återspeglar förväntad vinst - information om svararens informationsläge.
- *Upplysning* - påverkar den upplystes modeller
- Deklaration av *intention* - invit till samarbete.

That's all Folks!

- Bayesianism har starka normativa anspråk
- Stor frihet i val av sannolikhetsmodeller-
många problem - jungfrulig mark
- Modeller för multiagenter ett forskningsområde
- Semeiotiska/kognitiva angreppssätt
- ...

Litteratur:

- Course in Data Mining & Knowledge Discovery
<http://www.nada.kth/kurser/kth/2D5342>
- Ed Jaynes book on probability theory
<http://bayes.wustl.edu/etj/prob.html>
- Bayesian Data Mining - A survey (S. Arnborg).
- Glymour, Cooper: Computation, Causation and Discovery(MIT Press, 1999), Ch 2-3.
- J. Pearl: Causality-Models, Reasoning, Inference (Cambridge University Press, 2000).