NSA-Non Standard Analysis

Ett sätt att beskriva analys på.

Idén är ursprungligen från Leibniz.

Tänkesättet ersattes av det moderna synsättet skapat av bl.a. Weierstrass.

NSA nyskapades av Abraham Robinson på 1960-talet.

Huvudprincipen

Vi vill kunna räkna med *infinitesimal* tal och *hyperreella* tal. Det är tal som är oändligt små och oändligt stora.

Vad vi vill kunna säga

- Vi kommer att säga att $a \approx b$ om $a - b$ är infinitesimal.
- Vi kommer att säga att en funktion f är kontinuerlig om $f(x+\epsilon) \approx f(x)$ för alla infinitesimala ϵ.
- Vi kommer att säga att en funktion f är deriverbar om $f(x+\epsilon) \approx f(x) + f'(x)\epsilon + k\epsilon$ för alla infinitesimala ϵ där k är infinitesimal.

Integration

Välj ett oändligt stort tal N. Dela upp intervallet $[a, b]$ i N delintervall av längd $\frac{b-a}{N}$. Låt x_i vara mittpunkten på intervall i. Sätt

$$I = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Maximum av funktion

Vi vill hitta maximum till en kontinuerlig funktion f på ett slutet intervall $[a, b]$. Vi väljer ett oändligt tal N och definierar N tal $x_i = \frac{b-a}{N} i$ för $i = 1, \ldots, N$. Bland dessa *ändligt* många tal finns ett med störst f-värde, säg x_k. Alla tal x_i ligger oändligt nära ett *normalt* tal. Låt M vara det normala tal som ligger oändligt nära $f(x_i)$. Då är M maximum för f på $[a, b]$.

Leibniz problem

Hur definierar man en logiskt konsistent algebra med hyperreella tal?
Jämför med imaginära tal. De utgör en *utvidgning* av de reella talen. Reglerna för utvidgningen är enkla. ($i^2 = -1$).
Men vad finns det för regler för hyperreella tal?

Gödels fullständighetssats

Låt Γ vara en konsistent teori i första ordningens predikatlogik. Då finns det en modell M till Γ.

Kompakthetssatsen

Kompakthetssatsen säger att om Γ är en oändlig mängd meningar i första ordningens predikatlogik och om varje *ändlig* mängd i Γ är konsisten så är Γ konsisten.

Låt N vara teorin för de naturliga talen och låt $S_0, S_1, S_2, \ldots$ vara formlerna

$$\exists x \geq 0,\ \exists x \geq 1,\ \exists x \geq 2, \ldots$$

Låt N' vara teorin $N \cup \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$. Varje ändlig mängd formler i N' är satisfierbar. Alltså är teorin N' satisfierbar. Då finns det en modell för N' med ett x så att x är större än alla ”vanliga” heltal.

Robinsons idé

Använd kompakhetssatsen för *högre ordningens predikatlogik*. Vi kan formalisera vilka egenskaper våra hyperreella objekt skall ha och sedan visa att det inte leder till motsägelse att anta att de existerar. Enligt Gödels fullständighetssats finns det då en modell i vilken de existerar.

Två sätt att gå vidare

Modernare framställningssätt av NSA följer vanligen en ev två möjliga vägar:

- Beskrivning genom ”konkreta” modeller av NSA med hjälp av *ultrafilter*.
- Axiomatisk beskrivning av NSA. Bygger på tre stycken axiom som kallas *Transfer, Idealisering, Standardisering*.

Ultrafilter

Låt M vara en oändlig mängd. Ett *filter* är en familj F av delmängder till M

som uppfyller

1. $\emptyset \notin F$.
2. $A \in F$ och $A \subseteq B \Rightarrow B \in F$.
3. $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$.

Om det dessutom för varje delmängd A till M gäller att

$$A \in F \text{ eller } M - A \in F \text{ men inte båda}$$

så är F ett *ultrafilter*.

En enkel modell

Följande är en modell av vad ett hyperreellt tal är: Låt $a = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$ vara en talföljd med vanliga tal. Vi har ett ultrafilter F definierat på $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Vi säger att två talföljder a, b är ekvivalenta om mängden E av index i så att $a_i = b_i$ tillhör F. Ett hypereellt tal är en sådan ekvivalensklass.

Mer komplicerade objekt

Högre ordningens objekt kan definieras på motsvarande sätt. Låt $M = [M_1, M_2, \dots]$ vara en följd mängder. Låt $\bar{M}$ vara $M : s$ ekvivalensklass. Då är $\bar{M}$ en hyperreell mängd. Ett visst hyperreellt element $\bar{a}$ ligger i $\bar{M}$ om och endast om $\{i : a_i \in M_i\} \in F$.

Olika typer av objekt

Det finns tre typer av objekt:

- Standardobjekt: Det är de objekt som finns i ”vanlig” matematik.
- Interna objekt: Det är standardobjekten och de icke-standardobjekt som kan *definieras* predikatlogiskt i modellen.
- Externa objekt: Icke-standardobjekt som inte kan definieras inom modellen.

Idealiseringsprincipen

Låt R vara en relation och A en standardmängd. Antag att det för varje ändlig delmängd $X \subseteq A$ som består av standardelement gäller att det finns ett standardelement y så att $R(x, y)$ gäller för alla $x \in X$. Då finns det ett element y så att $R(a, y)$ gäller för alla standard $a \in A$. Detta y är (oftast) icke-standard.

Transfer

Låt ϕ vara en sluten, vanlig predikatlogisk formel. Låt M vara den vanliga standardmodellen av strukturen och låt M^* vara icke-standardmodellen av strukturen. Då gäller att ϕ är sann i M^* om och endast om ϕ är sann i M.

Varje oändlig mängd innehåller icke-standardelement

Låt A vara en oändlig mängd och låt $R(x, y)$ vara relationen $x \neq y \wedge y \in A$. Den uppfyller kraven för idealisering. Det betyder att det finns $y \in A$ så att $a \neq y$ för alla standardelement $a \in A$. Det betyder att y är ett icke-standardelement som tillhör A. Omvänt gäller att om A är en ändlig standardmängd så innehåller

den inte några icke-standardelement.

Tillämpning: Det finns oändligt många primtal

Låt N vara ett hyperreellt tal som är delbart med alla standardheltal. Låt P vara mängden av primtal (möjligen ändlig). Om p_i är ett standardprimtal så delar p_i talet N. Alltså delar inte p_i talet $N + 1$. Men det måste finnas ett primtal q som delar $N+1$. Men q måste då vara icke-standard. Alltså innehåller P icke-standardelement och måste därför vara oändlig.

Vanliga tal är nästan rationella

Låt α vara ett standardtal. Låt Q vara ett oändligt stort heltal. Då finns det ett heltal P så att $|\alpha - \frac{P}{Q}| \leq \frac{1}{Q}$. Men eftersom Q är oändligt är $\frac{1}{Q}$ ett infinitesimalt tal. Alltså gäller $\alpha \approx \frac{P}{Q}$. Varje standardtal är alltså nära ett rationellt tal.

Tillämpning: Darboux sats

Låt f vara en additiv funktion d.v.s. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ för alla reella tal. Om f är begränsad i något intervall när 0 så gäller $f(x) = kx$ för alla x där $k = f(1)$.

Det går lätt att visa att om $x = \frac{p}{q}$ så är $f(x) = \frac{p}{q}f(1) = kx$.Låt x vara ett godtyckligt reellt standardtal. Det finns då heltal p, q så att $x = \frac{p}{q} + \epsilon$. Så $f(x) = f(\frac{p}{q} + \epsilon) = f(\frac{p}{q}) + f(\epsilon)$. Antag att vi kan visa att $f(\epsilon) \approx 0$. Då gäller $f(x) \approx f(\frac{p}{q}) = k\frac{p}{q} \approx kx$.

För att visa att $f(\epsilon) \approx 0$ använder vi att f är begränsad nära 0. Det betyder att i ett tillräckligt litet intervall kring 0 är $|f(x)| \leq M$ för ett standardtal M. Men om $f(\epsilon)$ inte är infinitesimalt finns ett standardheltal n så att $|f(n\epsilon)| > M$. Men det är omöjligt eftersom $n\epsilon$ måte vara infinitesimalt.

Analys

Vi kan definiera olika topologier på enkla sätt: Vi säger att $x \approx y$ om x och y ligger oändligt nära varandra.

Hausdorffrum: Ett topologiskt rum där varje element kan ligga oändligt nära högst ett standardelement.

Kompakt rum: Ett topologiskt rum där varje element ligger oändligt nära åtminstone ett standardelement.

Likformig konvergens

En illustration av detta är följande: Det går att visa att en funktion f är likformigt kontinuerlig på en mängd A om $x \approx y$ medför att $f(x) \approx f(y)$ för *alla* element i A^*. Om f är kontinuerlig på en kompakt mängd A så är den likformigt kontinuerlig.

Bevis: Låt x, y vara två godtyckliga element i A^* så att $x \approx y$. Då finns ett standardelement z så att $x \approx z$ och $y \approx z$ (eftersom A är kompakt.) Eftersom f är kontinuerlig i standardpunkten z gäller $f(x) \approx f(z)$ och $f(y) \approx f(z)$. Men då gäller också $f(x) \approx f(y)$.

Ett genomgående mönster

NSA ersätter sekvenser och processer med idealiserade objekt.
Ex:

- En talföljd $a_1, a_2, \ldots$ innehåller en konvergent delföljd om och endast om det finns ett oändligt n så att $a_n \approx b$ där b är ett standardtal.
- En talföljd $a_1, a_2, \ldots$ är obegränsad om och endast om a_n är oändligt för något oändligt n.

Vissa oändliga mängder är nästan "ändliga"

Låt A vara en numrerbar mängd så att $A = \{a_1, a_2, \ldots$. Om n är ett oändligt tal så gäller att A är en delmängd av $A' = \{a_1 i : i \leq n\}$.

Tillämpning: Graffärgning

Om vi har en oändlig planär graf går den att fyrfärga. Övergången från vanliga 4-färgssatsen till detta fall går lätt att ordna med NSA.