

LABORATION 2

Tillförlitlighet, integraler, ekvationer, differentialekvationer

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper). Sista dag för bonuspoäng: 20/10.

Obs! En god idé är att börja med uppgift 6 och som hemarbete med papper och penna ställa upp ekvationssystemet.

1. Numerisk integration

a) Rotationssymmetrisk lur

Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

$$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x -axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2 dx$. Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2.6$. Börja med trapetsregeln med steglängderna 0.1 och 0.05 och extrapolera en gång så att simpsonvärdet erhålls. Hur många siffror verkar tillförlitliga?

Pröva sedan MATLABS `quad` med standardtolerans (gör `help quad`).

En fin tredimensionell lur bild gör man så här: Låt x och f vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser X , Y och Z :

$$X=x*\text{ones}(\text{size}(f_i)); Y=f*\cos(f_i); Z=f*\sin(f_i);$$

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller `surf(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur.

b) Periodiskt — trapetsregeln utan extrapolation!

Givet är den periodiska funktionen $f(t)$ som ska integreras över en period:

$$f(t) = \frac{e^{\cos(\pi t/2)}}{2 + \sin \pi t + 0.5 \cos(\pi t/2)}, \quad I = \int_0^T f(t) dt$$

Vad är perioden T ? Rita upp integrandkurvan över ett par perioder.

Integralvärdet önskas med mycket stor noggrannhet. Trapetsregeln är bästa metod för integration av periodiska funktioner då intervallet är en hel period¹.

Beräkna integralen med trapetsregeln med $n = 20$ och 40. Betrakta resultaten och fortsätt att fördubbla och studera hur snabbt integralapproximationerna uppnår datorprecision (med osäkerhet först i fjortonde eller femtonde siffran). Vid vilket n -värde har det nåtts och vad blir integralvärdet?

Uppgift 1 godkänd (datum, lärarsign):

¹Enligt Euler-Maclaurins summationsformel.

Namn:

2. Ellipsens omkrets på olika sätt

För en ellips med halvaxlarna a och b bestäms omkretsen av uttrycket

$$\text{Omkrets} = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 v} dv.$$

Integrandfunktionen är periodisk. Vad är perioden?

Låt $a = 10$ och beräkna omkretsen med mycket stor noggrannhet² för fyra ellipser med följande värden på halva lillaxeln: $b = 7, 5, 3, 1$.

Rita upp ellipserna; använd parameterformen som för en ellips med centrum i (x_c, y_c) och halvaxlarna a och b lyder

$$x_{\text{ellips}}(\varphi) = x_c + a \cos \varphi, \quad y_{\text{ellips}}(\varphi) = y_c + b \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Den indiske självlärd matematikern Srinivasa Ramanujan (1887–1920) föreslog följande approximativa formel för ellipsens omkrets:

$$O_{\text{Ramanujan}} = \pi(a + b) \left(1 + \frac{3c}{10 + \sqrt{4 - 3c}} \right) \quad \text{där } c = \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2}.$$

Hur bra är den? Beräkna avvikelserna mellan integralvärdet och ramanujanvärdet i de fyra fallen.

Uppgift 2 godkänd (datum, lärarsign):

3. Ekvationslösning

a) Skärning mellan lur och cylinder

Gå tillbaka till lurproblemet och notera värdet på rotationsvolymen med tre decimaler. Beräkna radien R hos den cylinder som har samma längd $L = 2.6$ och upptar samma volym som luren. Problemet är nu att räkna fram var luren och cylindern skär varann. Det gäller alltså att lösa ekvationen $y(x) = R$, där vänsterledet är lurens konturfunktion.

Använd Newton-Raphsons metod men skriv först om ekvationen lämpligt (*redovisas*)! Markera skärningspunkterna på lurkurvan.

Ta ut mellanresultat så att den kvadratiske konvergens hos Newton-Raphsons metod kan utläsas.

Beräkna hur mycket en osäkerhet på ± 0.001 i rotationsvolymen påverkar skärningspunkternas koordinatvärden.

b) Löparbana med sekantmetoden

En ellipsformad 400-meters löparbana ska anläggas på en plan som är 160 meter lång. Hur bred plan krävs? Lös med sekantmetoden och använd Ramanujans formel för omkretsen.

Uppgift 3 godkänd (datum, lärarsign):

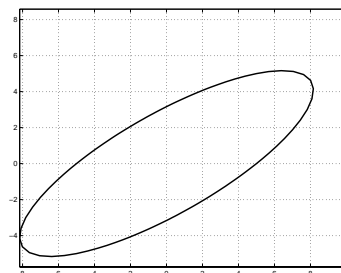
²Metod enligt uppgift 1b!

Namn:

4. Skärning mellan ellipser, ickelinjärt ekvationssystem

Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av $0.4x^2 + y^2 - xy = 10$ och den ellips med centrum i $(4, 2)$ och halvaxlarna $a = 4$ och $b = 6$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

$$(x - 4)^2/a^2 + (y - 2)^2/b^2 = 1.$$



Ellipserna ska ritas³ och de erhållna skärningspunkterna markeras med en ring. Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm.

Uppgift 4 godkänd (datum, lärarsign):

5. Differentialekvationer — begynnelsevärdesproblem

a) Lurig ODE

Givet är differentialekvationsproblemet

$$y'' + \pi y e^{x/3} (2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) - y/9 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/3.$$

Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så att differentialekvationen kan skrivas till ett system av två första ordningens ODE. Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2.6$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6} . Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 1.

Om man utöver u_1 och u_2 inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi y^2 = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer. Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Verkar det bekant? Förklara den geometriska innebörden av resultatet.

b) Duffings ekvation

Duffings ekvation är en andra ordningens differentialekvation

$$x'' = a \cos t + x - x^3 - bx', \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$$

där a och b är konstanter. Utnyttja MATLABs `ode45` med relativ tolerans 10^{-6} för att beräkna och rita lösningskurvan $x(t)$ fram till $t = 24$ för fallet $a = 7.5$ och $b = 0.15$.

Pröva Eulers metod med steget $\delta t = 0.002$ på Duffings ekvation och rita upp kurvresultatet i samma figur som ovan. Det spårar ur efter ett tag, när då? Kolla om Eulers metod med $\delta t = 0.001$ ger väsentlig förbättring.

En steghalvering till leder till oacceptabelt lång beräkningstid, men gör det om du har tålamod.

Uppgift 5 godkänd (datum, lärarsign):

³Den sneda ellipsen skrivs bäst i polär form inför uppritningen.

Namn:

6. Differentialekvationer — randvärdesproblem

Använd finitadifferensmetoden för att bestämma lösningskurvan i intervallet $0 \leq t \leq 4$ till randvärdesproblemet

$$y'' - ty' + e^{-t/2}y = t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 0.8.$$

Redovisa på papper hur ekvationssystemet kommer att se ut.

I MATLAB-koden ska du först pröva $N = 10$ delintervall. Fördubbla successivt upp till $N = 80$ (eventuellt längre). Rita de erhållna resultaten i samma figur.

Uppgift 6 godkänd (datum, lärarsign):

7. Bästa cirkelanpassning, ickelinjär modell

Vi vill anpassa en cirkel till punkterna $(1.1, 0.7)$, $(1.5, 1.9)$, $(2.2, 3.1)$, $(3.2, 3.0)$, $(4.5, 2.3)$, $(4.8, 1.0)$, nu med cirkeln skriven på formen $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$. Det leder till ett överbestämt ickelinjärt ekvationssystem. Använd Gauss-Newtons metod för lösningen.

Skriv i varje iteration ut värdet på det uttryck som minimeras i Gauss-Newtons metod. Rita upp de givna punkterna och den bästa cirkeln.

Uppgift 7 godkänd (datum, lärarsign):

8. Min- och maxpunktsbestämning

Den periodiska funktionen i uppgift 1b har två minpunkter och två maxpunkter i intervallet $0 < t < T$. Använd gyllenesnittetsökning för att bestämma extrempunkternas koordinater med fem korrekta decimaler. Markera punkterna på funktionskurvan.

Hur fungerar algoritmen och vilka konvergensgenskaper har den?

Uppgift 8 godkänd (datum, lärarsign):

Tänk efter hur många timmar ungefär som laboration 2 har tagit.

Laboration 2 redovisad och helt klar! Datum:

Godkänd av