# Föreläsning 5

Deduktion

# Hur ett deduktivt system fungerar

# Komponenter - Vokabulär

- Ett deduktivt system använder ett visst slags språk som kan kallas för systemets vokabulär.
- I mindre formella fall är kanske vokabulären de typ av uttryck som man kan förvänta sig finna i systemet.
- Ett exempel är i evolutionslära där man kan förvänta sig uttryck som "naturligt urval" o.s.v.
- I mera formella fall, som ren logik, ges vokabulären av exakt syntaktiska regler.

# Komponenter - Härledningsregler

- Alla formella system har någon typ av formella och informella regler för hur man får dra slutsatser.
- I t.ex. fysik kan dessa regler ges av etablerad praxis.
- I formell system som logik är härledningsreglerna exakt formulerade.
- I matematik är ofta härledningsreglerna inte explicit givna men de är möjliga att precisera.

# Axiom

- Idén är att axiom är en typ av grundläggande sanningar.
- Med hjälp av härledningsreglerna skapar man nya sanningar som vi kallar teorem.
- Inom systemet menar man att bara det som är axiom eller teorem är sanningar.
- I formella system brukar man skilja mellan logiska och icke-logiska axiom. Med starka härledningsregler behöver man inga logiska axiom.

# Är axiom sanningar?

- Den ursprungliga idén var att axiomen skulle utgöra sanningar.
- De skulle dessutom utgöra den enklaste typen av sanningar som det var omöjligt att tvivla på.
- En senare idé var att vi kan se axiomen som antaganden. Vi kan undersöka vilka konsekvenser dessa antaganden får.
- Ett viktigt exempel på detta är icke-euklidisk geometri.

# Speciella metoder

- Teorier frikopplade från verkligheten.
- Indirekta bevis
- Motsägelsebevis

# Teorier frikopplade från verkligheten

- Teorier frikopplade från verkligheten.
- Ett exempel på detta är åter igen icke-euklidisk geometri.
- Vi kan alltså undersöka konsekvenserna av ett påstående utan att det behöver överensstämma med verkligheten.
- Den enda begränsningen är att påståenden inte får vara motsägelsefulla.

# Indirekta bevis

- Indirekta bevis bygger på att vi gör ett antagande A och härleder en konsekvens B. Det ger oss ett bevis av satsen A => B.
- Vi måste då försöka utreda konsekvenserna av något som vi antar (A) även om detta inte är sant eller till och med är motsägelsefullt.
- Vi kan t.ex. visa att 1+1=3 => 7 = 18

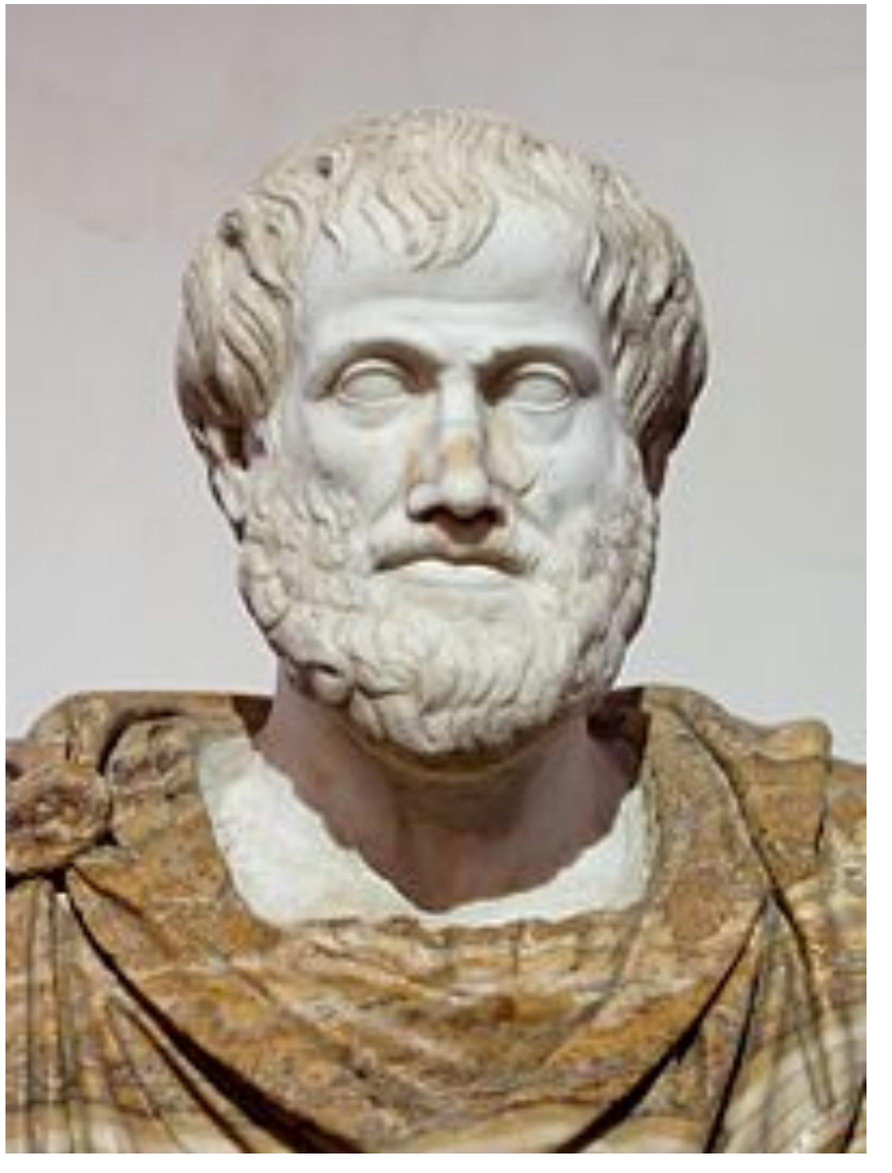
# Motsägelsebevis

- Vi kan anta att ett påstående A är falskt. Vi visar sedan att det leder till motsägelse. Det ger oss då ett bevis för att A är sant.
- Ett berömt exempel är Pythagoras bevis för att roten ur 2 är irrationellt.
- Det finns existensbevis som är konstruerade som motsägelsebevis. För att visa att något existerar visar vi att det leder till motsägelse att anta att det inte existerar.

# Historik

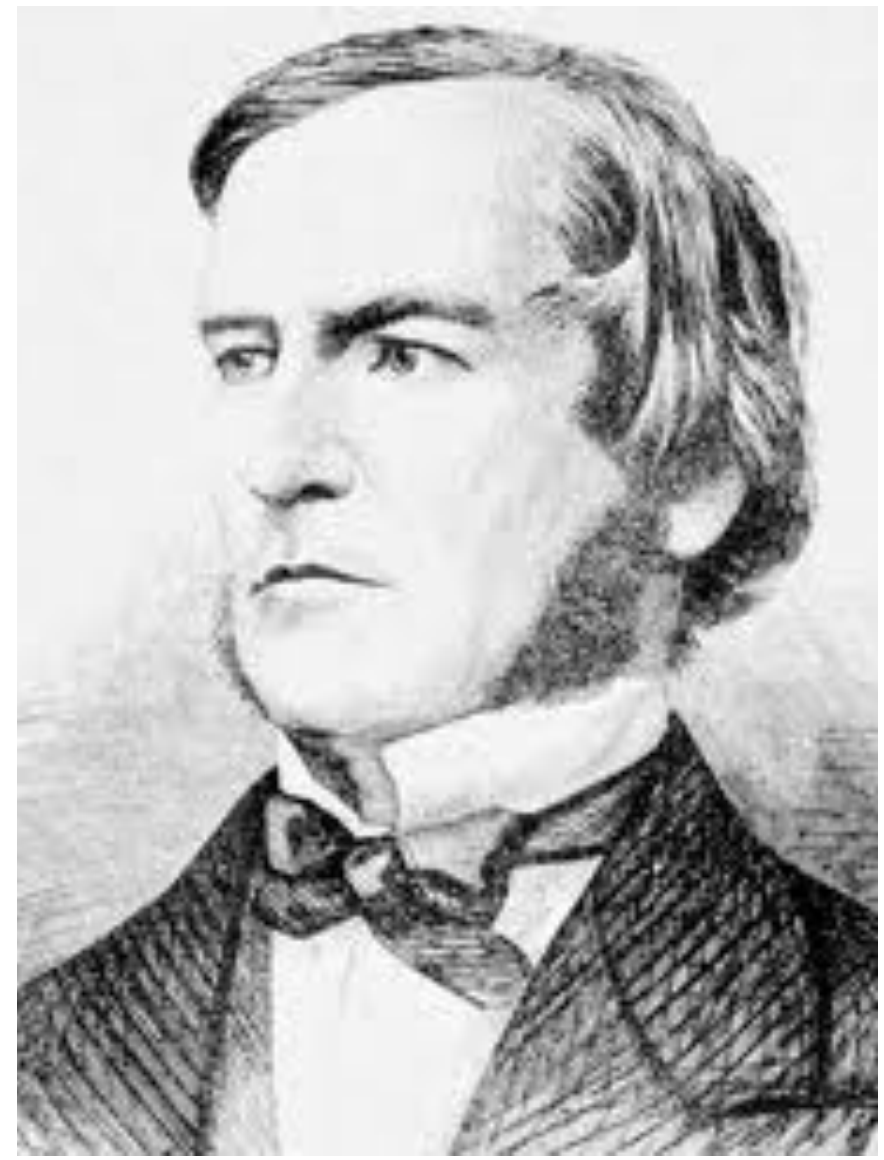
# Aristoteles

- Grundar en speciell typ av logik som arbetar med syllogismer.
- Det är ett slags generellt schema för sanningar. Aristoteles logik är därför den första formella logiken.



# Boole

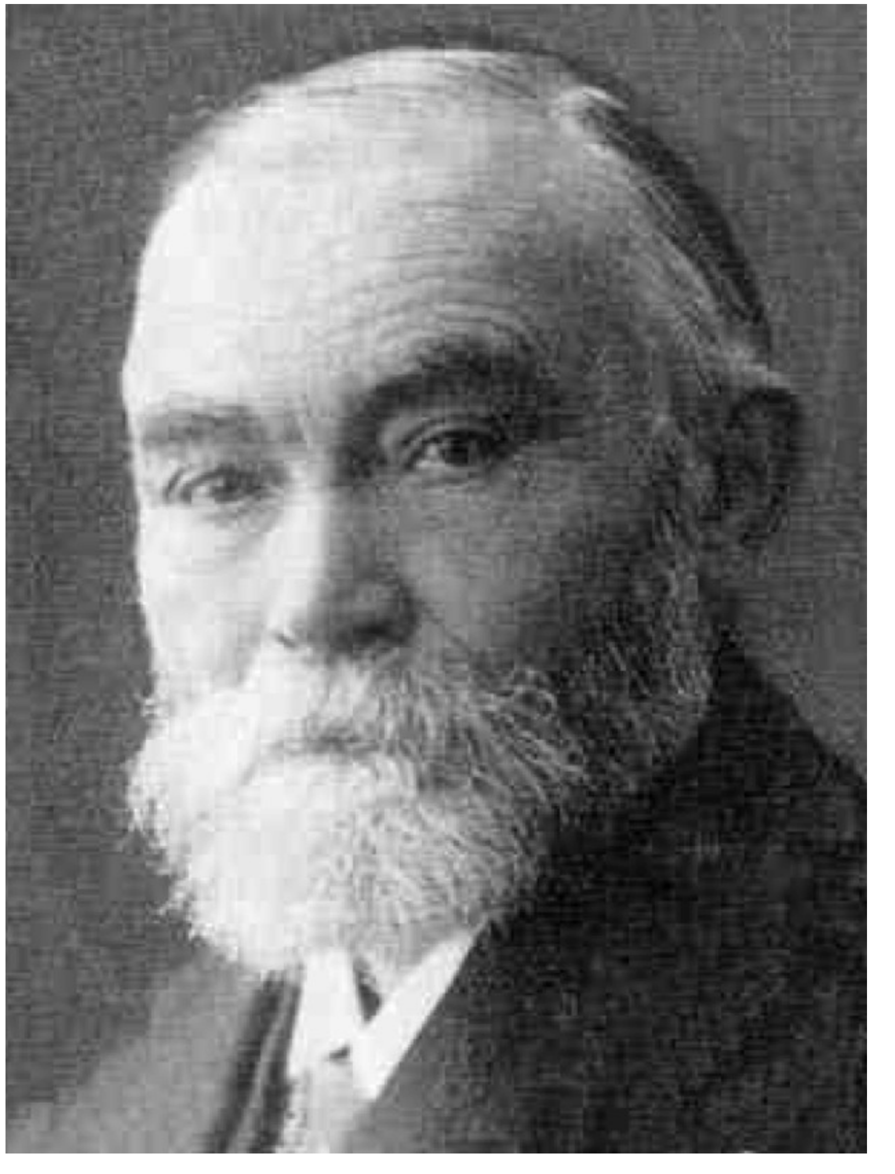
- Skapade en algebra för att hantera beräkningar av logiska uttryck.
- Utvecklade satslogiken.



# Frege och matematisk logik

- Frege skapar den matematiska logiken.
- Detta innebär att stegen i matematiska bevis får en given form.
- Frege kombinerar logiken med Cantors mängdlära.
- Låt P(x) vara ett predikat. Frege antog att det alltid går bra att definiera mängden

$\{x : P(x)\}$



# Russells paradox

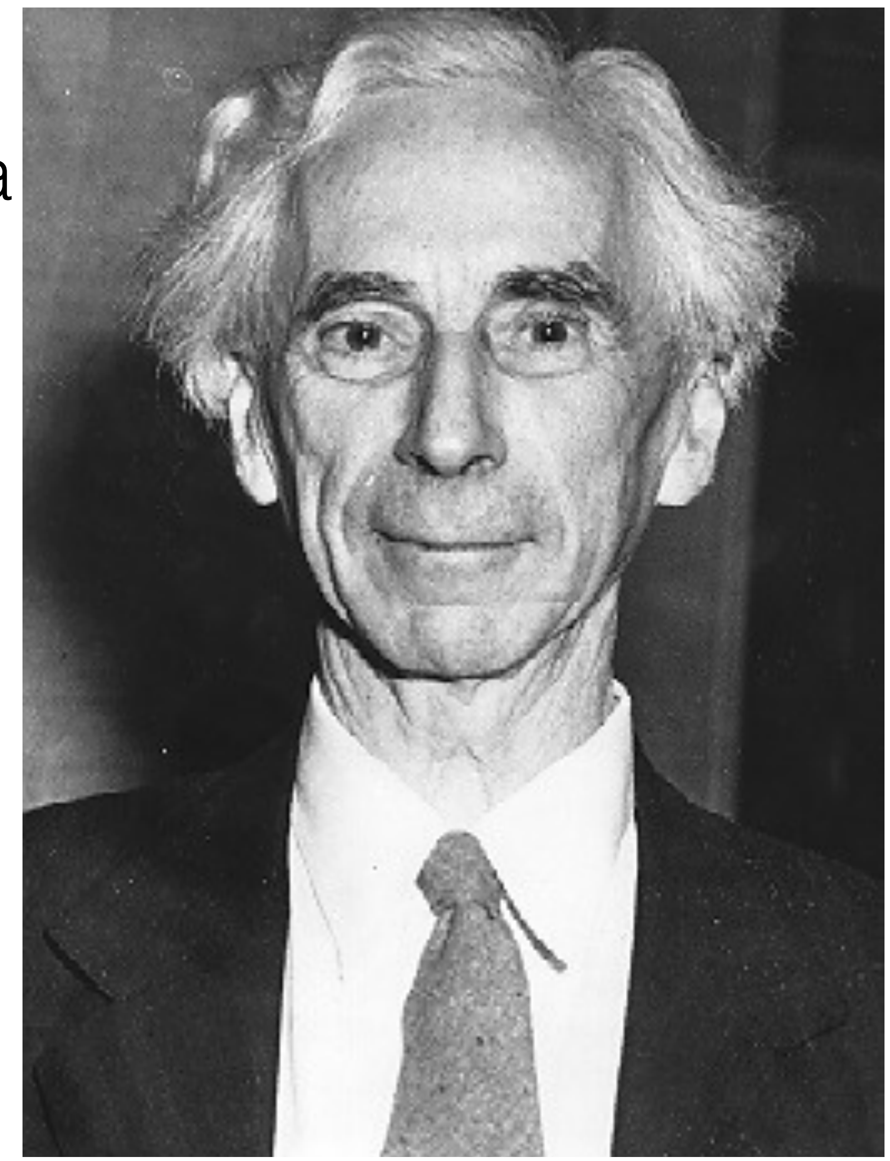
- Russell visade i början av 1900-talet att en sådan definition kan leda till problem.

- Om vi sätter $P(x)\colon x \notin x$

och $M = \{x : x \notin x\}$

vad händer då? Är $M \in M$

eller $M \notin M$ ?



# Gödel

- Gödel studerar formella system av en generell typ.
- Han visar att formlerna i ett sådant system kan ges ett s.k. Gödelnummer.
- Han visar att det går att definiera ett predikat som uttrycker bevisbarhet i systemet.
- Med ett diagonalargument visar han att det finns satser som är sanna men som  inte kan bevisas i systemet.

# Datalogi

# Datalogi handlar om konstruerade saker

- Precis som matematik handlar teoretisk datalogi om saker som är mentala konstruktioner (eller ?)
- Handlar mycket om att finna begränsningar för vad som går att göra.
- Och att kunna verifiera att konstruktioner är korrekta.
- I algoritmteori studeras dock algoritmer och hur de kan kombineras på kreativa sätt.

# Avgörbarhet

- De viktigaste teoretiska resultaten teoretisk datalogi rör förmodligen oavgörbarhet.
- Ett av de kändaste resultaten är att stopp-problemet är oavgörbart.
- Ett annat liknande resultat är "semi-oavgörbarheten" av bevisbarhet i predikatlogik.
- Ett annat känt problem är Churchs tes.

# Begränsningar och egenheter

# Första ordningens logik

- Första ordningens logik använder sig av variabler, funktioner, konstanter, predikatsymboler och kvantifikatorer.
- Kvantifikatorer antas vara knutna till variabler som refererar till enskilda element.
- Som tidigare sagts är logiken semi-avgörbar.
- Om något går att bevisa kan vi hitta beviset.
- Men det finns inget sätt att avgöra att något inte går att bevisa.

# Första ordningens logik forts.

- Det visar sig att det finns många saker som inte går att uttrycka med första ordningens logik.
- T.ex. går det inte att definiera vad som menas med att en mängd är ändlig.
- Det går inte heller att precisera exakt vad som menas med naturliga tal.
- Första ordningens logik har allvarliga brister.

# Högre ordningens logik

- Högre ordningens logik får vi genom att anända i stort sett samma språk som i första ordningens logik.
- Skillnaden är att vi låter kvantifikatorerna referera till mer komplicerade objekt som funktioner eller mängder.
- Resultatet blir att vi kan uttrycka praktiskt taget allt vi behöver.
- T.ex. ger Peanos axiom en fullständig beskrivning av heltalen.
- Men priset är att bevisbarhet inte är avgörbar alls!

# Samband mellan typerna av logik

- Sammanfattningsvis gäller följande:
- Första ordningens logik är stark vad gäller bevisbarhet.
- Finns det ett bevis går det att hitta det.
- Men det finns många saker som inte går att uttrycka i första ordningens logik.
- Högre ordningens logik kan uttrycka "allt".
- Men när det gäller bevisbarhet är situationen mycket sämre.

# En delning

- Grovt sett kan vi säga att följande gäller:
- Teoretiska dataloger arbetar mest med första ordningens logik.
- Den lämpar sig mest för algoritmer.
- Matematiker föredrar för det mesta högre ordningens logik.
- Den kräver mer kreativitet i bevisen.

# Två forskningsområden

- Det finns en konflikt i logiken mellan det man kan uttrycka och beskriva och det man kan bevisa.
- Konflikten speglas i sambandet mellan första ordningens logik och högre ordningens logik.
- Två viktiga områden inom logik är följande:
- Modellteori: Handlar om vad man kan uttrycka med logik och formella språk.
- Bevisteori: Handlar om hur bevis kan konstrueras i logik och formella system.

# Lite om användning

# Cantor och mängdlära

- Cantor utvecklar mängdläran under senare halvan av 1800-talet.

# Kardinalitetsresonemang

- Ett berömt resultat är Cantors resonemang om uppräknebarhet.
- Cantor visade att mängden av rationella tal är uppräknelig.
- Sedan visade han att mängden reella tal är överuppräknelig.
- Detta ger ett bevis för att det existerar irrationella tal.
- På samma sätt visade han existensen av s.k. transcendenta tal.

# Matematik och verklighet

- En anledning till att deduktion används i vetenskap är att naturen på ett "mystiskt sätt" verkar följa matematiska lagar.
- Finns det någon förklaring till det?