

# DD1350 Logik för dataloger

LÖSNING TILL OMTENTAMEN  
19 augusti 2009, 10.00 - 12.00

Dilian Gurov  
KTH CSC  
08-790 81 98

## 1 Satslogik, Predikatlogik

Kravet för godkänt på denna del är 6 poäng av 10. Om du är godkänd på första kontrollskrivningen, är du automatiskt godkänd på *första uppgiften* (du får alltså 5 poäng och bör inte lösa den uppgiften).

1. Betrakta följande sekvent:

$$\exists x P(x, x) \vdash \exists x \exists y P(x, y)$$

5p

Förklara intuitivt varför sekventen gäller:

Existentiella kvantifikatorerna  $\exists x$  och  $\exists y$  kan hänvisa till en och samma objekt i en formel; därför, om  $P(x_0, x_0)$  för någon objekt  $x_0$  ur universumet, så gäller också  $\exists x \exists y P(x, y)$ .

Presentera ett *bevis* till sekventen i *naturlig deduktion*. Rita tydligt alla *boxar* för att visa räckvidden för alla antaganden och nya variabler i beviset:

1	$\exists x P(x, x)$	premiss
2	$x_0 P(x_0, x_0)$	antagande
3	$\exists y P(x_0, y)$	$\exists y$ i 2
4	$\exists x \exists y P(x, y)$	$\exists x$ i 3
5	$\exists x \exists y P(x, y)$	$\exists x$ e 1,2-4

2. Hitta en *motvaluering* som visar att följande sekvent *inte* gäller:

$$p \rightarrow q \vee r, r \rightarrow \neg p \models \neg r$$

5p

En motvaluering är:

$$\{p : F, q : T, r : T\}$$

Finns det fler motvalueringar?

Ja, det finns en till.

Visa en *sanningsvärdestabell* som motiverar dina svar:

	$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow q \vee r$	$r \rightarrow \neg p$	$\neg r$
	T	T	T	T	F	F
	T	T	F	T	T	T
	T	F	T	T	F	F
	T	F	F	F	T	T
$\rightarrow$	F	T	T	T	T	F
	F	T	F	T	T	T
$\rightarrow$	F	F	T	T	T	F
	F	F	F	T	T	T

## 2 Prolog, Induktion, Temporallogik

Kravet för godkänt på denna del är 6 poäng av 10. Om du är godkänd på andra kontrollskrivningen, är du automatiskt godkänd på *första uppgiften* (du får alltså 5 poäng och bör inte lösa den uppgiften).

1. Listor över heltal kan definieras (som en term mängd) med BNF så här:

5p

$$IntList ::= \text{empty} \mid \text{intlist}(Int, IntList)$$

där  $Int$  definierar alla heltal. Några exempel på heltalslistor är:

```
empty
intlist(8, empty)
intlist(3, intlist(-5, empty))
```

Definiera *induktivt* funktionen  $\mathbf{sum}(l)$  som beräknar summan av alla tal i en heltalslista  $l$ . Till exempel är  $\mathbf{sum}(\text{intlist}(3, \text{intlist}(-5, \text{empty})))$  lika med  $-2$ .

Induktiv definition:

$$\begin{aligned} \mathbf{sum}(\text{empty}) &\stackrel{\text{def}}{=} 0 \\ \mathbf{sum}(\text{intlist}(n, l)) &\stackrel{\text{def}}{=} n + \mathbf{sum}(l) \end{aligned}$$

Använd din definition för att beräkna *stegvist*:

$$\mathbf{sum}(\text{intlist}(-4, \text{intlist}(7, \text{intlist}(-1, \text{empty}))))$$

Stegvis beräkning:

$$\begin{aligned} &\mathbf{sum}(\text{intlist}(-4, \text{intlist}(7, \text{intlist}(-1, \text{empty})))) \\ &= (-4) + \mathbf{sum}(\text{intlist}(7, \text{intlist}(-1, \text{empty}))) \\ &= (-4) + 7 + \mathbf{sum}(\text{intlist}(-1, \text{empty})) \\ &= (-4) + 7 + (-1) + \mathbf{sum}(\text{empty}) \\ &= (-4) + 7 + (-1) + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. Låt  $Atoms \stackrel{\text{def}}{=} \{p, q\}$ , och låt  $\mathcal{M}$  vara modellen definierad som:

5p

$$\begin{aligned} S &\stackrel{\text{def}}{=} \{s_0, s_1, s_2\} \\ \rightarrow &\stackrel{\text{def}}{=} \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_0), (s_2, s_0)\} \\ L &: \begin{array}{l} s_0 \mapsto \{\} \\ s_1 \mapsto \{p\} \\ s_2 \mapsto \{q\} \end{array} \end{aligned}$$

Föreslå en formel  $\phi$  i temporallogiken CTL som formaliserar systemegenskapen:

$p$  och  $q$  gäller aldrig samtidigt

Formel:

$$AG \neg (p \wedge q)$$

Avgör om  $\mathcal{M}, s_0 \models \phi$  gäller och motivera ditt svar:

Ja, därför att  $p \wedge q$  är falskt i alla tillstånd i modellen, och därför gäller  $\neg (p \wedge q)$  i alla tillstånd i alla stigar som utgår utifrån  $s_0$ .

### 3 Hoare-logik

Kravet för godkänt på denna del är 3 poäng av 5 från *första* uppgiften. Bara då kommer andra, C-uppgiften att räknas.

1. Betrakta följande program `TestPos` som kan användas för att avgöra om startvärdet på variabeln `x` är positivt eller inte: 5p

```
if (x > 0) {
  y = 1;
} else {
  y = 0;
}
```

Specifcera programmet med en Hoare-trippel  $(\phi) \text{TestPos} (\psi)$  enligt partiell korrekthet. Det skall vara entydigt från specifikationen hur programmet `TestPos` kan användas *utan* att känna till själva koden:

$$(\phi = x = x_0) \text{TestPos} ((x_0 > 0 \rightarrow y = 1) \wedge (x_0 \leq 0 \rightarrow y = 0))$$

Förklara intuitivt din specifikation:

Specifikationen säger att om startvärdet på  $x_0$  är positivt, så blir slutvärdet på  $y$  lika med 1; annars blir slutvärdet på  $y$  lika med 0.

Blir specifikationen annorlunda om vi är intresserade i total korrekthet? Motivera ditt svar:

Specifikationen blir samma, då programmet alltid terminerar.

2. Verifiera programmet `TestPos` från förra uppgiften relativt din specifikation där. Presentera beviset C som bevisablå:

$\langle x = x_0 \rangle$	Förvillkor
<code>if (x &gt; 0) {</code>	
$\langle x = x_0 \wedge x > 0 \rangle$	If
$\langle (x_0 > 0 \rightarrow 1 = 1) \wedge (x_0 \leq 0 \rightarrow 1 = 0) \rangle$	Implied
<code>y = 1;</code>	
$\langle (x_0 > 0 \rightarrow y = 1) \wedge (x_0 \leq 0 \rightarrow y = 0) \rangle$	If
<code>} else {</code>	
$\langle x = x_0 \wedge \neg(x > 0) \rangle$	If
$\langle (x_0 > 0 \rightarrow 0 = 1) \wedge (x_0 \leq 0 \rightarrow 0 = 0) \rangle$	Implied
<code>y = 0;</code>	
$\langle (x_0 > 0 \rightarrow y = 1) \wedge (x_0 \leq 0 \rightarrow y = 0) \rangle$	If
<code>}</code>	
$\langle (x_0 > 0 \rightarrow y = 1) \wedge (x_0 \leq 0 \rightarrow y = 0) \rangle$	Eftervillkor

Identifiera alla *bevisförpliktelser* (resultering från regeln `Implied`) och motivera varför de gäller:

Vi har två bevisförpliktelser:

- a)  $\vdash x = x_0 \wedge x > 0 \rightarrow (x_0 > 0 \rightarrow 1 = 1) \wedge (x_0 \leq 0 \rightarrow 1 = 0)$   
vilken gäller därför att när  $x = x_0$  och  $x > 0$  så  $x_0 > 0$  och då gäller både  $x_0 > 0 \rightarrow 1 = 1$  och  $x_0 \leq 0 \rightarrow 1 = 0$ .
  - b)  $\vdash x = x_0 \wedge \neg(x > 0) \rightarrow (x_0 > 0 \rightarrow 0 = 1) \wedge (x_0 \leq 0 \rightarrow 0 = 0)$   
med likadan motivering.
-