ADK

Föreläsning

Undre gränser

- Med beslutsträd
  Exempel: sortering
- Med tuff motståndare
  Exempel: talgissning
  median

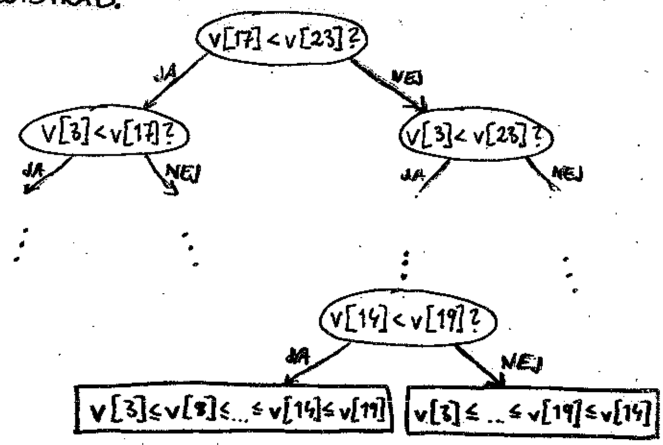
Smart algoritm

- För att hitta i-te minsta talet

Hur många jämförelser krävs minst för att sortera n element?

A: {n element} → {n-permutationer}

Anta att den enda operationen (förutom tilldelning) som kan göras på element är jämförelse mellan två element. Då kan algoritmen A beskrivas som ett beslutsträd:



Trädets höjd = tidskomplexiteten

Antalet löv ≥ antalet permutationer = $n!$

Om inga permutationer på förhand kan uteslutas

Ett binärträd av höjd h har högst 2^h löv

⇒ Tidskomplexiteten är $\Omega(n \log n)$

Talgissning med tuff motståndare

Gissa ett tal mellan 1 och 10 — 1 ⊢⊢⊢⊢⊢⊢⊢⊢⊢⊣ 10

3

Större! — 4 ⊢⊢⊢⊢⊢⊢⊣ 10

8

Mindre! — 4 ⊢⊢⊣ 7

5

Större! — 6 ⊢⊣ 7

6

Större! — 7 ⊢ 7

Du klarade det inte på 4 gissningar. Rätt svar var 7.

```
GISSNING ← 0
MIN ← 1; MAX ← 10
WRITE("Gissa ett tal mellan " MIN " och " MAX)
WHILE MIN < MAX DO
   GISSNING ← GISSNING + 1
   X ← ReadInteger()
   M ← (MIN + MAX)/2
   IF X<M THEN WRITE("Större!") ELSE WRITE("Mindre!")
   IF X<M AND X≥MIN THEN MIN ← X+1
   IF X≥M AND X≤MAX THEN MAX ← X-1
WRITE("Du klarade det inte på " GISSNING " gissningar)
WRITE("Rätt svar var " MIN)
```

Komplexitet för medianproblemet

Problem: Hitta medianen bland n element

> Hur många jämförelser krävs för att hitta medianelementet i värsta fallet?

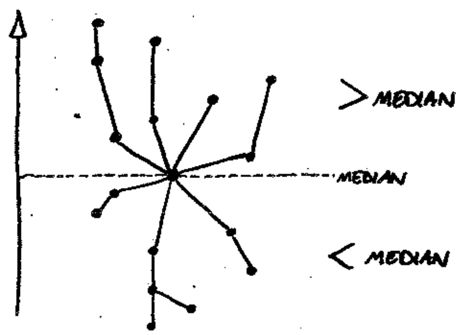
Trivial övre gräns:

Följande algoritm gör $O(n \log n)$ jämförelser

Mergesort($S[1..n]$); return $S[\frac{n+1}{2}]$

Trivial undre gräns:

Varje algoritm som hittar medianen måste göra en kedja av jämförelser mellan varje annat tal och medianen:



Alltså krävs minst $n-1$ jämförelser.

Undre gräns för median med tuff motståndare

> Idé: Visa att en tuff motståndare kan tvinga algoritmen att göra onyttiga jämförelser

Jämförelsen $x>y$ är onyttig om $x>$medianen och $y<$medianen.

Taktik för tuffa motståndaren:

Välj 0 som median

Tilldela element ett värde först då algoritmen vill jämföra det med något annat element

Jämförelse mellan	Svara	Tilldela
nytt och nytt	$>$	första positivt, andra negativt
positivt och nytt	$>$	negativt tal
negativt och nytt	$<$	positivt tal
känt och känt	sanningen	—

När $\frac{n-1}{2}$ negativa eller $\frac{n-1}{2}$ positiva värden har tilldelats har inte motståndaren något val längre.

Varje algoritm kan på så sätt tvingas att göra $\frac{n-1}{2}$ onyttiga jämförelser utöver dom $n-1$ nyttiga.

Vi får undre gränsen $n-1+\frac{n-1}{2}=\frac{3n-3}{2}$ jämförelser.

Bästa kända undre gränsen är $2{,}01n$ [Dor, Håstad, Ulfberg, Zwick 2001]

Hitta i-te minsta talet i S

Select$(S[1..n], i)$ =

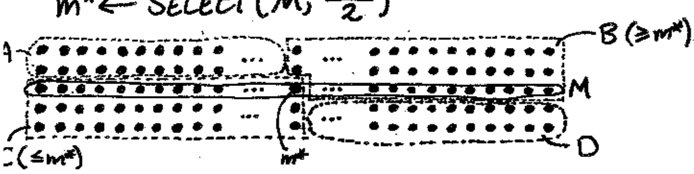
IF $n \leq 5$ THEN Sortera($S[1..n]$); RETURN $S[i]$

Dela upp S i $\frac{n}{5}$ grupper med 5 tal i varje.

Hitta medianen i varje grupp och partitionera gruppen efter den.

$M \leftarrow \{\text{medianer}\}$

$m^* \leftarrow \text{Select}(M, \frac{n/5}{2})$



$S_1 \leftarrow C \cup \{x \in A \cup D : x \leq m^*\}$

$S_2 \leftarrow B \cup \{x \in A \cup D : x > m^*\}$

IF $i = |S_1|$ THEN RETURN m^*

IF $i < |S_1|$ THEN RETURN Select(S_1, i)

ELSE RETURN Select($S_2, i-(n-S_2)$)

Komplexitetsanalys: (antal jämförelser)

$$T(n) \leq \underbrace{6 \cdot \frac{n}{5}}_{\text{hitta medianerna i grupperna}} + \underbrace{T\left(\frac{n}{5}\right)}_{\text{hitta } m^*} + \underbrace{2 \cdot \frac{n}{5}}_{\text{fördela på } S_1 \text{ och } S_2} + \underbrace{T\left(\frac{n}{5}+\frac{n}{2}\right)}_{\text{rekursion på } S_1 \text{ eller } S_2} = 1.6n + T(0.2n) + T(0.7n)$$

Man kan visa att $T(n) \leq 16n$

Detta ger övre gränsen $16n$ för medianproblemet.

Bästa kända övre gränsen är $2.95n$ [Dor, Zwick 1999]