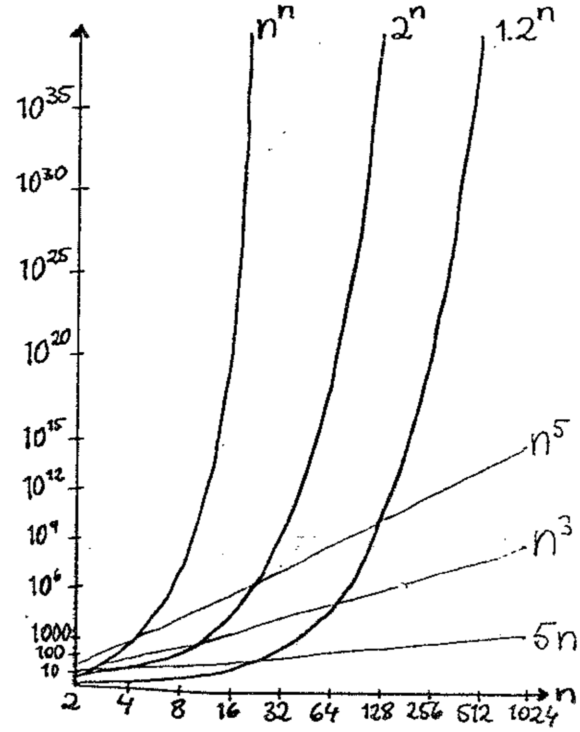
ALGORITMER, DATASTRUKTURER OCH KOMPLEXITET

- RIMLIG TID – POLYNOMISK TID
- SVÅRA PROBLEM
- GEMENSAMMA EGENSKAPER
- NP-FULLSTÄNDIGA PROBLEM

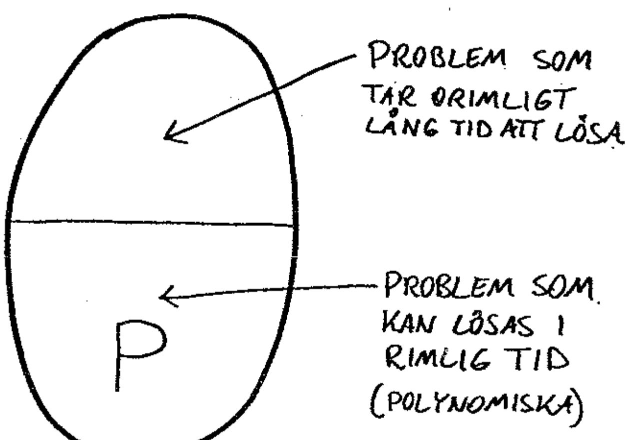
VAD ÄR RIMLIG TID?



POLYNOMISK TID

ALGORITMER SOM GÅR I POLYNOMISK TID, DVS $O(n^k)$ FÖR NÅGON KONSTANT k, ÄR RIMLIGT SNABBA.

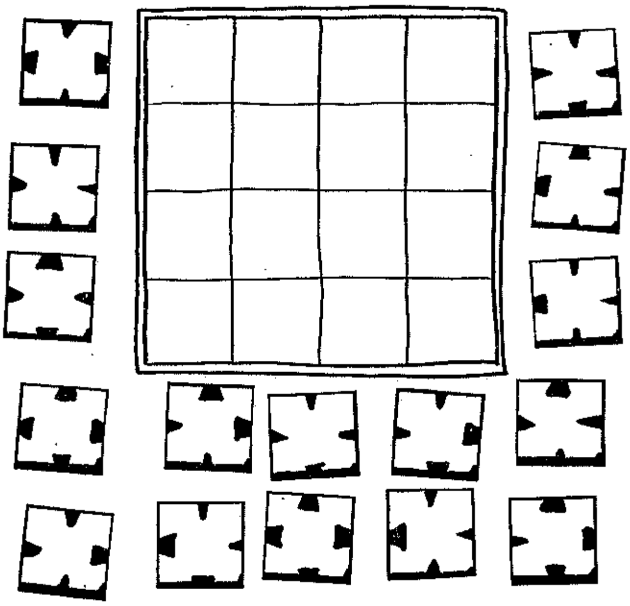
ALGORITMER SOM GÅR I EXPONENTIELL TID, DVS $O(2^{n^c})$ FÖR NÅGON KONSTANT c, TAR ORIMLIGT LÅNG TID.



Svårt problem 1: pussel

Instans: n^2 stycken kvadratiska pusselbitar

Fråga: Kan pusselbitarna placeras in i en $n \times n$-ruta så att mönstret går ihop överallt?



Svårt problem 2: TSP

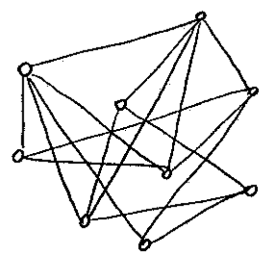
Instans: graf G, avståndsfunktion w, mål K

Fråga: Finns det någon tur som passerar alla hörn i G exakt en gång och börjar och slutar i samma hörn och har längd $\leq K$?

Svårt problem 3: Hamiltonsk krets

Instans: graf G

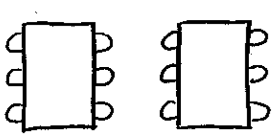
Fråga: Finns det någon tur som passerar alla hörn i G exakt en gång och börjar och slutar i samma hörn?



Svårt problem 4: sittning

Instans: plan över bords och stolars placering, gästrestriktioner, tex att gästerna g_1 och g_2 inte ska sitta bredvid varandra.

Fråga: Finns det någon bordsplacering som inte bryter några restriktioner

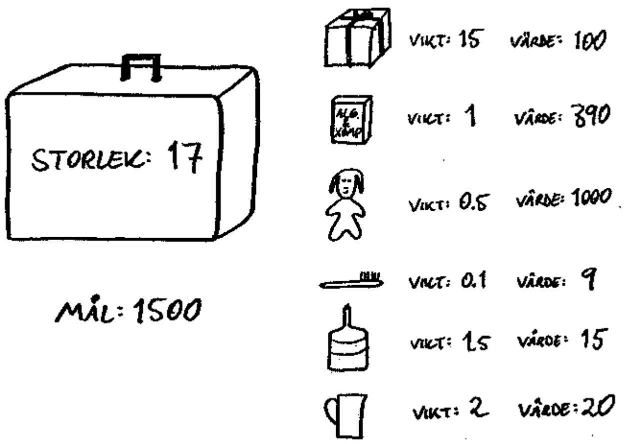


g_1 och g_3 inom synhåll
g_2 och g_3 inte bredvid varandra
g_4 och g_7 inte bredvid varandra
g_7 och g_8 vid samma bord
g_2 och g_6 vid olika bord
⋮

Svårt problem 5: Kappsäcksproblemet

Instans: Mängd prylar med vikt w_i och värde v_i, kappsäcksstorlek S, mål K

Fråga: Går det att lägga prylar av sammanlagt värde $\geq K$ i kappsäcken utan att den blir tyngre än S?



Svårt problem 6: Kartfärgning

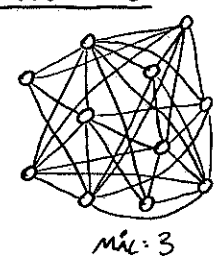
Instans: Karta över länder

Fråga: Går det att färga länderna med tre färger så att två angränsande länder alltid har olika färg?

Svårt problem 7: Graffärgning

Instans: Graf G, mål K

Fråga: Går det att färga grafens hörn med högst K färger så att två angränsande hörn alltid har olika färg?



Lösning av dessa problem

Metod: totalsökning

Testa en lösning, om den inte duger, backa tillbaka och testa nästa (backtracking)

Exponentiellt många lösningar måste testas $\Rightarrow$ exponentiell tid (för denna algoritm)

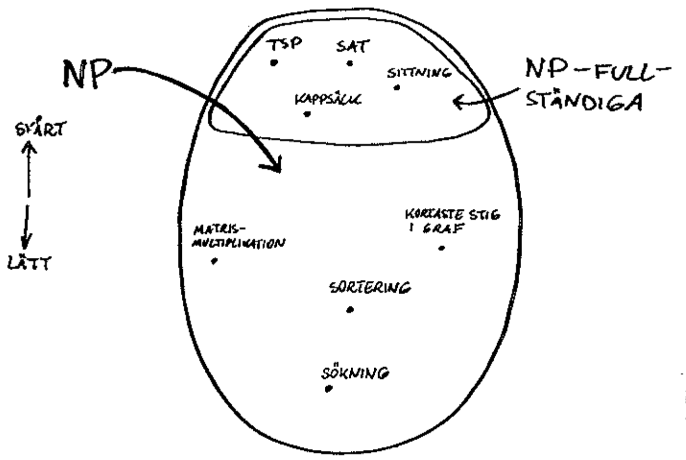
Gemensam egenskap:
Lätt att kolla om en lösning duger

Om problemet har en lösning som duger kan denna <u>verifieras</u> i polynomisk tid.

Dessa problem bildar komplexitetsklassen NP

NP-FULLSTÄNDIGA PROBLEM

DOM 7 SVÅRA EXEMPELPROBLEMEN ÄR ALLA NP-FULLSTÄNDIGA, DVS TILLHÖR DOM SVÅRASTE PROBLEMEN I NP.



VARJE PROBLEM I NP KAN REDUCERAS TILL VARJE NP-FULLSTÄNDIGT PROBLEM, OCH REDUKTIONEN TAR BARA POLYNOMISK TID.

REDUKTION I POLYNOMISK TID

EXEMPEL: REDUCERA HAMILTONSK KRETS TILL TSP:

HAMILTONIAN-CIRCUIT $(G)=$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ KONSTRUERA GRAF } G'=\langle V',E'\rangle \text{ GENOM} \\ \quad V'=V \\ \quad E'=V'\times V' \text{ (DVS FULLSTÄNDIG GRAF)} \\ \bullet\ w(v_i',v_j')=\begin{cases}1 \text{ OM } (v_i,v_j)\in E\\ 2 \text{ OM } (v_i,v_j)\notin E\end{cases} \\ \bullet\ K=|V| \end{array}\right\} \text{TAR POL. TID}$$

- RETURN $(\text{TSP}(G', w, K))$

– OM DEN KONSTRUERADE TSP-INSTANSEN HAR EN LÖSNING AV LÄNGD $\leq K$ SÅ FINNS DET EN HAMILTONSK KRETS.

– OM DEN KONSTRUERADE TSP-INSTANSEN INTE HAR NÅGON LÖSNING AV LÄNGD $\leq K$ SÅ FINNS DET INTE NÅGON HAMILTONSK KRETS.

ÄR $P \neq NP$?

ALLA NP-FULLSTÄNDIGA PROBLEM ÄR LIKA SVÅRA (OM ETT KAN LÖSAS I POLYNOMISK TID KAN ALLA GÖRA DET)

$P \subseteq NP$

INGEN VET OM $P=NP$ MEN NÄSTAN ALLA TROR ATT $P \neq NP$.

$\boxed{\text{TES: VARJE NP-FULLSTÄNDIGT PROBLEM TAR EXPONENTIELL TID ATT LÖSA (I VÄRSTA FALLET).}}$