



## CNF-SAT ÄR NP-FULLSTÄNDIGT

### 1. CNF-SAT ∈ NP

BEVIS:  $\left. \begin{array}{l} \text{SAT} \in \text{NP} \\ \text{CNF-SAT} \leq_p \text{SAT} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{CNF-SAT} \in \text{NP}$

### 2. CNF-SAT ÄR NP-SVÄRT

BEVIS 1: ANVÄND COOKS SATS (SOM VISADE ATT SAT ÄR NP-SVÄRT) OCH NOTERA ATT DEN RESULTERANDE FORMELN KAN SKRIVAS OM I CNF I POLYNOMISK TID.

BEVIS 2: REDUCERA SAT TILL CNF-SAT.

GIVET EN SAT-FORMEL  $\varphi$ , KONSTRUERA EN CNF-FORMEL  $\psi$  SÅ ATT  $\varphi$  ÄR SATISFIERBAR OMF  $\psi$  ÄR SATISFIERBAR.

## 3CNF-SAT ÄR NP-FULLSTÄNDIGT

### 1. 3CNF-SAT ∈ NP

BEVIS:  $\left. \begin{array}{l} \text{SAT} \in \text{NP} \\ \text{3CNF-SAT} \leq_p \text{SAT} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{3CNF-SAT} \in \text{NP}$

### 2. 3CNF-SAT ÄR NP-SVÄRT

BEVIS: REDUCERA CNF-SAT TILL 3CNF-SAT

GIVET EN CNF-SAT-FORMEL  $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$  KONSTRUERA EN 3CNF-SAT-FORMEL  $\psi$  SOM EN KONJUNKTION AV FÖLJANDE KLAUSULER, FÖR  $i \in [1..m]$ :

ANTA ATT  $C_i$  BESTÅR AV  $j$  LITERALER.

- $j=3$ : ANVÄND  $C_i$  DIREKT I  $\psi$
- $j=2$ :  $C_i = (l_1 \vee l_2)$  ANVÄND  $(l_1 \vee l_2 \vee y) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \bar{y})$   
DÄR  $y$  ÄR EN NY VARIABLEZ.
- $j=1$ :  $C_i = (l)$  ANVÄND  $(l \vee y_1 \vee y_2) \wedge (l \vee y_1 \vee \bar{y}_2) \wedge (l \vee \bar{y}_1 \vee y_2) \wedge (l \vee \bar{y}_1 \vee \bar{y}_2)$
- $j > 3$ :  $C_i = (l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_j)$  ANVÄND  
 $(l_1 \vee l_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee l_2 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee l_3 \vee y_3) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{j-4} \vee l_{j-2} \vee y_{j-3}) \wedge (\bar{y}_{j-3} \vee l_{j-1} \vee l_j)$

## ANVÄNDBARA NP-FULLSTÄNDIGA PROBLEM

### 3CNF-SAT

GIVET: BOOLESK 3CNF-FORMEL  $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$

FRÅGA: FINNS NÅGON VARIABLEZTILLDELNING SOM SATISFIERAR FORMELN?

### CLIQUE (KLICK)

GIVET: ORIKTAD GRAF  $G$ , TAL  $K$



FRÅGA: FINNS DET  $K$  HÖRN I  $G$  SOM ÄR FULLSTÄNDIGT SAMMANBUNDNA?

### INDEPENDENT SET (OBEROENDE MÄNGD)

GIVET: ORIKTAD GRAF  $G$ , TAL  $K$



FRÅGA: FINNS DET  $K$  HÖRN I  $G$  SOM ÄR HELT OBEROENDE?

### VERTEX COVER (HÖRNTÄCKNING)

GIVET: ORIKTAD GRAF  $G$ , TAL  $K$



FRÅGA: FINNS DET  $K$  HÖRN I  $G$  SOM TÄCKER SAMTLIGA KANTER?

### GRAPH COLOURING (GRAFFÄRGNING)

GIVET: ORIKTAD GRAF  $G$ , TAL  $K$



FRÅGA: KAN HÖRNEN I  $G$  FÄRNAS MED  $K$  FÄRGER SÅ ATT INGA NÄRLIGGANDE HÖRN HAR SAMMA FÄRG?

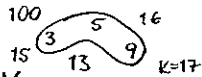
## HAMILTONSK CYKEL

GIVET: ORIKTAD GRAF  $G$



FRÅGA: FINNS DET NÅGON CYKEL I  $G$  SOM PASSERAR VARJE NÖRN I  $G$  EXAKT EN GÅNG?

SUBSET SUM (DELMÄNGDSSUMMA)



GIVET: EN MÄNGD POSITIVA TAL  $P$ , TAL  $K$

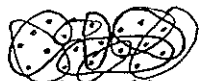
FRÅGA: FINNS DET EN DELMÄNGD AV TALEN I  $P$  VARS SUMMA ÄR  $K$ ?

INTEGER PROGRAMMING (HELTALSPROGRAMMERING)

GIVET:  $m \times n$ -MATRIS  $A$ ,  $m$ -VEKTOR  $b$ ,  $n$ -VEKTOR  $c$ , TAL  $K$   
ALLA INDATA ÄR HELTAL

FRÅGA: FINNS DET EN  $n$ -VEKTOR  $x$  MED HELTAL SÅ ATT  $Ax \leq b$  OCH  $c \cdot x \geq K$ ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 47$$



SET COVER (MÄNGDTÄCKNING)

GIVET: UPPSÄTTNING DELMÄNGDER AV EN MÄNGD  $M$ , TAL  $K$

FRÅGA: FINNS DET  $K$  AV DELMÄNGDERNA SOM TILLSAMMANS INNEHÅLLER ALLA ELEMENT I  $M$ ?

## EXEMPEL:

VISA ATT FÖLJANDE PROBLEM ÄR NP-FULLSTÄNDIGT

DELGRAFSISOMORFI

GIVET: ORIKTADE GRAFER  $G_1$  OCH  $G_2$

FRÅGA: ÄR  $G_1$  EN DELGRAF TILL  $G_2$ ?

- VISA ATT DELGRAFSISOMORFI TILLHÖR NP.
- VISA ATT PROBLEMET ÄR NP-SVÅRT GENOM ATT REDUCERA

## 0-1-PROGRAMMERING ÄR NP-FULLSTÄNDIGT

1. 0-1-PROGRAMMERING  $\in$  NP

BEVIS: GIVET  $A, b, c$  OCH  $K$ .

GISSA (Icke-deterministiskt)  $x \in \{0, 1\}^n$

KONTROLLERA ATT  $Ax \leq b$  OCH ATT  $c \cdot x \geq K$

2. VISA ATT 0-1-PROGRAMMERING ÄR NP-SVÅRT.

BEVIS: REDUCERA FRÅN 3-CNF-SAT.

GIVET EN 3CNF-SAT-FORMEL  $\varphi = G_1 \wedge \dots \wedge G_m$

KONSTRUERA  $A, b, c, K$  SÅ ATT  $\varphi$  ÄR SATISFIERBAR OCH DET FINNS  $x \in \{0, 1\}^n$  SÅ ATT  $Ax \leq b$  OCH  $c \cdot x \geq K$

INFÖR EN VARIABEL  $x_i$ ; FÖR VARJE VARIABEL  $y_j$  I  $\varphi$ . LÅT  $x_i = 0$  MOTSVARA  $y_j = \text{FALSK}$  OCH  $x_i = 1 \Leftrightarrow y_j = \text{SAN}$ .

INFÖR EN OLIKHET FÖR VARJE KLAUSUL  $G_i$ .

$$y_i \vee y_j \vee y_k \rightarrow x_i + x_j + x_k \geq 1$$

$$y_i \vee y_j \vee \bar{y}_k \rightarrow x_i + x_j - x_k \geq 0$$

$$y_i \vee \bar{y}_j \vee \bar{y}_k \rightarrow x_i - x_j - x_k \geq -1$$

$$\bar{y}_i \vee \bar{y}_j \vee y_k \rightarrow -x_i - x_j + x_k \geq -2$$

LÅT  $c = (000 \dots 0)^T$  OCH LÅT  $K = 0$ .