

Numeriska metoder och grundläggande programmering – Laboration 5 – Integration och differentialekvationer

Efter den här laborationen skall du känna igen problemtyperna randvärdes- och begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer och kunna lösa dessa med differensmetoder. Du skall kunna analysera noggrannhetsordning och bestämma stabilitetsegenskaper både teoretiskt och experimentellt.

1 Numerisk integration

Vi önskar beräkna ett integralvärde

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

med hjälp av någon kvadraturformel. De kvadraturformler som behandlas i denna kurs kan alla skrivas på formen

$$I_{approx}(f) = \sum_{k=0}^M \alpha_k f(x_k)$$

där α_k kallas kvadraturvikter och x_k kallas kvadraturpunkter. M är antalet delintervall. Detta ger att steglängden $h = (b - a)/M$.

Kom ihåg att alltid börja med att rita integranden, $f(x)$, över integrationsintervallet för att se hur $f(x)$ beter sig på intervallet.

Beräkna följande integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 \sqrt{x+2}dx$$

- (1) exakt med penna och papper. Kalla denna exakta lösning för $I(f)$.

Lös sedan integralen numeriskt med

- (2) trapetsregeln
(3) trapetsregeln och en extrapolation

Undersök hur approximationsfelet (trunkeringsfelet), E_h beror av steglängden, h , genom att plotta felet som funktion av steglängderna $h = 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$.

Använd MATLABs kommando `loglog` för plottarna. Lägg gärna in referenslinjer i plottarna. En typ av referenslinje är att plotta steglängden mot sig själv. Använd även andra tänkbara referenslinjer.

Uppskatta metodernas noggrannhetsordning, p , med hjälp av dessa plottar. För en methods noggrannhetsordning gäller

$$|E_h| = |I(f) - I_{approx}(f)| \leq \text{konstant}h^p.$$

där $I_{approx}(f)$ är det numeriskt uträknade integralvärdet med antingen trapetsregeln eller trapetsregeln och en extrapolation. Är noggrannhetsordningen den förväntade för respektive fall?

Idag den har

med personnummer

godkänts av

2 Differentialekvationer

2.1 Begynnelsevärdesproblem

Givet är följande differentialekvation

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t) - 2y, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, 20].$$

I denna deluppgift ska ovanstående differentialekvation lösas numeriskt med Eulers framåtmetod och trapetsmetoden. Uppgiften går ut på att undersöka

- hur trunkeringsfelet avtar med steglängden h (för små värden på h), dvs noggrannheten
 - hur den numeriska lösningen uppför sig för 'stora' h -värden (stabilitet)
- (1) Lös först differentialekvationen exakt (analytiskt), dvs med metoder som du lärt dig i matematik. Denna lösning betecknas $y(t)$.
 - (2) Dela in tidsintervallet $[0, 20]$ i n ekvidistanta steg h . Eulerlösningen i en punkt t betecknas $y(t, h)$. Skriv ett Matlabprogram som beräknar Eulerlösningarna för $n = 100$, $n = 500$ och $n = 1000$. Plotta i samma graf den exakta lösningen $y(t)$ samt de tre Eulerlösningarna. Plotta även i ett loglog-diagram felet $|y(20) - y(20, h)|$ som funktion av h . Vilken ordning hos Eulers framåtmetod kan utläsas ur diagrammet?
 - (3) Gör samma beräkningar, grafer och diagram för trapetsmetoden (dvs gör punkt (2) för Trapets istället för Euler).
 - (4) Dela in tidsintervallet $[0, 20]$ i $n = 40, 20, 10$ och 5 ekvidistanta steg. Beräkna de fyra Eulerlösningarna och plotta dem tillsammans med den exakta lösningen i samma graf.
 - (5) Gör punkt (4) med trapetsmetoden istället för Eulers metod.

Vilken slutsats kan du dra beträffande den numeriska stabiliteten för de två metoderna genom att titta på graferna?

Idag den har

med personnummer

godkänts av

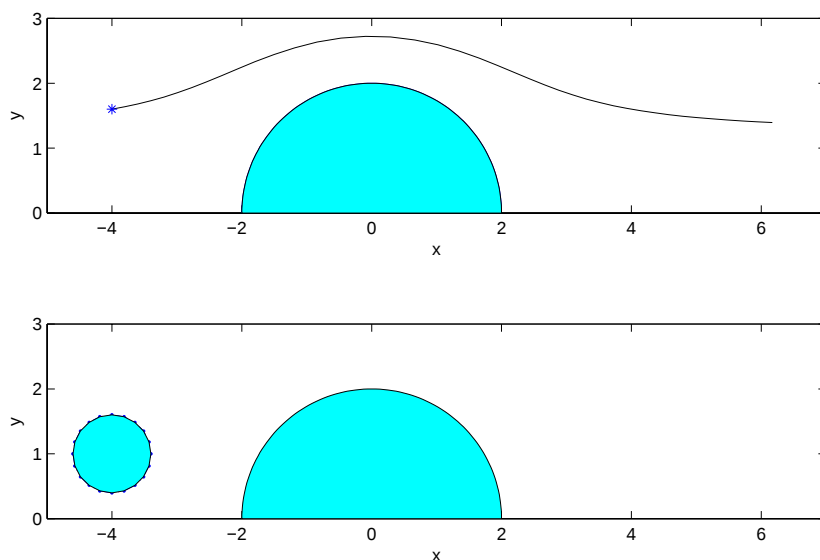
2.2 Begynnelsevärdesproblem (system)- Partikelflöde förbi en cylinder

En långsträckt cylinder med radien $R = 2$ befinner sig i en inkompressibel vätska som strömmar i positiv x -riktning med hastigheten 1. Cylinderns axel är vinkelrät mot flödesriktningen. Det hela kan betraktas som ett tvådimensionellt problem i rummet. Läget, $x(t)$ och $y(t)$ för en flödespartikel vid tiden t bestäms av partikelns startposition, $x(0)$ och $y(0)$ och följande system av differentialekvationer

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{R^2 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

a) Beräkna med hjälp av `ode45` och rita strömningskurvor för tre flödespartiklar som vid beräkningens början befinner sig vid $x = -4$ och vid y -positionerna 0.4, 1.0 och 1.6. I figuren har strömningskurvan för en partikel som startar i $x = -4$ och $y = 1.6$ ritats.

b) Vi vill också studera hur ett "paket" av flödespartiklar deformeras när det strömmar förbi cylindern. Låt startformationen för partikelpaketet vara en regelbunden tjugohörning med centrum i $(-4, 1)$ och radiellt avstånd till hörnen 0.6, se figuren. Det gäller nu att lösa differentialekvationssystemet för alla partiklar i flödespaketet och sedan rita en ögonblicksbild av partikelpositionerna (man kan använda sig av kommandot `fill`) vid tidpunkterna $t = [0, 2, 4, 6, 8, 10]$. Tänk noga igenom hur du ska lösa detta!



Idag den har

med personnummer

godkänts av

2.3 Randvärdesproblem

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längd L och med tvärsnittsarean A_t .

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \quad (1)$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L . Konstanten k är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Värme kommer att läcka in eller ut genom ändpunkterna beroende på vilken temperatur som omgivningen har och vilken värmemängd som utvecklas i staven. Värmeflödet i vänster och höger

ändpunkt ges av uttrycken

$$-A_t k \frac{dT}{dx}(0), \quad -A_t k \frac{dT}{dx}(L) \quad (2)$$

Antag att $L = 2$ [m], $A_t = 0.01$ [m²], $k = 2.5$ [J/(K · m · s)], $T_0 = 300$ [K], $T_L = 400$ [K] och $Q(x)$ [J/(s · m³)] är funktionen

$$Q(x) = 300e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$, där $h(n+1) = L$ och approximerar andraderivatan med centraldifferens erhålles

$$\frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{k}Q(x_i), i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Diskretiseringen leder till ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \quad (4)$$

där A är en $n \times n$ -matris, T är en $n \times 1$ -vektor med temperaturvärden i det inre av intervallet och b är en $n \times 1$ -vektor som beror av bl a randvärdena T_0 och T_L samt $Q(x_i)$ -värdena.

a) Skriv ner matrisen A med **papper och penna**. Vilken struktur har matrisen A ?

b) Skriv ett Matlab-program som löser randvärdesproblemet. Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Matrisen skapar du i Matlab enklast på följande sätt:

```
e = ones(n,1);
A = spdiags([-e 2*e -e], -1:1, n,n);
```

Kommandot `spdiags` är ett kommando för att skapa glesa matriser. Gör (`help spdiags`) för mer information.

Räkna ut temperaturen T då staven delas upp i 249 lika stora delar dvs för fallet $N = 249$. Lösningen får du genom att lösa det linjära ekvationssystemet $AT = b$ i Matlab med `\`. Lösningen T kommer att innehålla temperaturen i alla punkter x_i utom i randpunkterna. Plotta temperaturen som funktion av x på HELA intervallet $0 \leq x \leq L$.

Hur stor är den maximala temperaturen ?

Idag den har

med personnummer

godkänts av