

**Lösningar till tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
2D1212, torsdag 2004-08-26 kl 14–17**

P1. Diverse begrepp

a. diagonal matris:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tridiagonal matris:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}$$

triangulär matris:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

symmetrisk matris

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

b. Newtons metod:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

c. Om steglängden h minskar så minskar felet mellan den exakta och den numeriska lösningen med h^3 .

d. Vid Gausselimination av en fylld systemmatris gäller att $t = Kn^3$ där t är tiden, K är en konstant och n är antalet obekanta. Här får vi att $0.08 = K20^3$ dvs $K = 0.08/20^3$ och tiden det tar för att lösa ett system med 100 obekanta blir då $t = (0.08/20^3)100 = 10$ s.

Vid lösning av ett tridiagonalt system gäller att $t = Kn$ så i det här fallet tar det $t = (0.5/2000)10000 = 2.5$ s.

P2. Kurvanpassning och båglängdsberäkning

a. Ansätt ett andragradspolynom: $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Vi får nu följande linjära ekvationssystem att lösa för koefficienterna a_0, a_1 och a_2

$$a_0 - a_1 + a_2 = 1$$

$$a_0 = 2$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 4.$$

Löser vi detta får vi att $a_0 = 2$, $a_1 = 3/2$ och $a_2 = 1/2$ och polynomet blir $p_2(x) = 2 + 3x/2 - x^2/2$.

b. % Beräkna båglängden med trapetsmetoden. Använd tre olika steglängder

```
clear all
h=0.5;
for i=1:3
    x=[-1:h:1];
    g=sqrt(1+(3/2-x).^2);
    I(i)=h*(sum(g)-0.5*(g(1)+g(end)));
    h=h/2;
end
I
```

c. Ansätt ett tredjegradpolynom: $p_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$. Villkoret att $f'(0) = 0$ ger att $c_1 = 0$. Konstanterna c_0, c_2, c_3 bestäms på samma sätt som i uppgift a och polynomet blir $p_3(x) = 2 + x^2/2 + 3x^3/2$.

P3. Ekvationslösning

a. Newtons metod givet x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{för } n = 1, 2, \dots$$

blir i det här fallet

$$x_0 = -3$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^2 + x - 2}{2x + 1}$$

och en iteration ger att

$$x_1 = -3 + \frac{4}{5} = -\frac{11}{5} = -2.2$$

b. Fixpunktsiterationen $x_{n+1} = G(x_n)$ konvergerar om $|G'(\alpha)| < 1$ där α är ett värde nära roten.

$$x_{n+1} = 2 - (x_n)^2 = G(x_n)$$

$$|G'(-2)| = 4, \text{ konvergerar ej}$$

$$x_{n+1} = \frac{2}{x_n} - 1 = G(x_n)$$

$$|G'(-2)| = 1/2, \text{ konvergerar om startvärde väljes tillräckligt nära roten.}$$

P4. Dämpad pendelrörelse

a. Inför $y = u_1$ och $dy/dx = u_2$ så erhålles följande system

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \quad u_1(0) = 1$$

$$\frac{du_2}{dt} = -u_1 - u_2, \quad u_2(0) = 0$$

b. Eulers metod för systemet blir

$$\begin{aligned}u_1^{n+1} &= u_1^n + hu_2^n, & u_1^0 &= 1 \\u_2^{n+1} &= u_2^n - h(u_1^n + u_2^n), & u_2^0 &= 0 \\t^{n+1} &= t^n + h, & t^0 &= 0\end{aligned}$$

Med $u_1^0 = 1$, $u_2^0 = 0$ och $h = 0.2$ får vi

$$\begin{aligned}u_1^1 &= u_1^0 + 0.2u_2^0 = 1 + 0.2 \cdot 0 = 1 \\u_2^1 &= u_2^0 - 0.2(u_1^0 + u_2^0) = 0 - 0.2(1 + 0) = -0.2 \\t^1 &= t^0 + h = 0 + 0.2 = 0.2 \\u_1^2 &= u_1^1 + 0.2u_2^1 = 1.0 - 0.2 \cdot 0.2 = 0.96 \\u_2^2 &= u_2^1 - 0.2(u_1^1 + u_2^1) = -0.2 - 0.2(1 - 0.2) = -0.36 \\t^2 &= t^1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4\end{aligned}$$

dvs $y(0.2) = 1$ och $y(0.4) = 0.96$.

c. %% Eulers metod

```
clear all

h=0.01;      % Steglängd
T=10;        % Sluttid
t=[0:h:T];
u1(1)=1;     % Begynnelsevärde
u2(1)=0;     % Begynnelsevärde

for i=2:length(t)

    u1(i)=u1(i-1)+h*u2(i-1);
    u2(i)=u2(i-1)-h*(u1(i-1)+u2(i-1));

end

plot(t,u1)
```

d. %% Med ode45

```
clear all
T=10;
[t,u]=ode45('pendel',[0 T],[1 0]);
plot(t,u(:,1));

med funktionen pendel.m

function f=pendel(t,u);
f=[u(2);-u(1)-u(2)];
```