

**Lösningar till tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
2D1212, måndag 2005-05-02 kl 10–13**

Tillåtet hjälpmedel: Nada:s Användarhandledning för MATLAB

Betygsgränser: för betyg **D**: minst 20 poäng, för betyg **C**: över 26p, för betyg **B** över 29p (inklusive bonuspoäng). Poäng i intervallet $18 \leq p \leq 19.5$ kan efter komplettering ge betyg **E**. Svar ska motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

P1. Diverse begrepp

a. (2) En gles matris har få nollskilda element. Gleshantering är effektiv med avseende på cpu-tid (färre operationer behövs vid lösning) samt minneshantering (besparing av lagringsutrymme).

b. (2) Interpolation: anpassar man ett polynom som går **genom** givna punkter. Man kan anpassa ett polynom av grad $m - 1$ till de givna punkterna.

Minsta kvadratmetoden: Hittar ett polynom som i minsta kvadratmetodens mening anpassar sig så bra som möjligt till alla punkter. Dvs polynomet måste inte nödvändigtvis gå genom någon punkt.

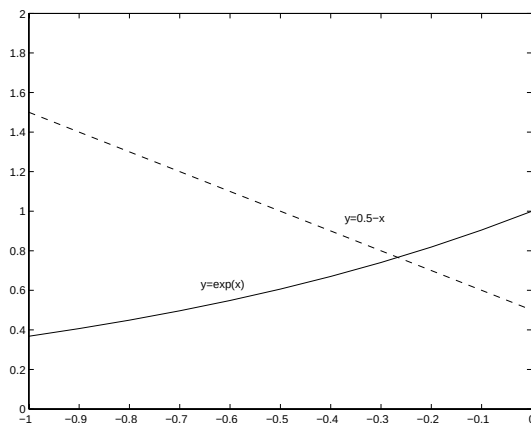
c. (2) $f(x_k)$ samt h_k kommer att konvergera mot noll.

d. (2) Explicit metod: framåt Euler, $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$. Dvs känner man u_n kan man direkt räkna ut u_{n+1} .

Implicit metod: bakåt Euler, $u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$. Här ingår u_{n+1} i högerledet och man kan inte beräkna u_{n+1} direkt givet att man vet u_n .

P2. Ekvationslösning

(1) a. Se figur nedan.



(3) b. Newtons metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + ax_n - 0.5}{e^{x_n} + a}$$

Algoritm i matlab

```
clear all
x=-0.2;
tn=1;
while abs(tn)>0.5e-5
f=exp(x)+x-0.5;
fprime=exp(x)+1;
tn=f/fprime;
x=x-tn
end
disp(x)
x=-0.26625
```

(3) c. Fixpunktsmetoden ger:

$$x_{n+1} = 0.5 - e^{x_n} = G(x_n)$$

Fixpunktsmetoden konvergerar om $|G'(x)| < 1$ i närheten av roten. Här får vi $|-e^{-0.2}| \approx 0.8$ dvs metoden kommer att konvergera.

P3. Givet randvärdesproblemet

- (4) a. Dela in $x = [1, 3]$ i ett N delintervall av längden h och låt $x_j = jh + 1$ där $j = 0, 1, 2, \dots, N$ och $h = 2/(N)$. Låt $y_j \approx y(x_j)$ och approximerar ekvationen i de inre punkterna enligt

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - \frac{y_j}{x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$
$$y_0 = 1 \quad y_N = 2$$

Samlar vi ihop termer så får vi

$$y_{j+1} - (2 + \frac{h^2}{x_j})y_j + y_{j-1} = 0$$

och det linjära ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} -(2 + \frac{h^2}{x_1}) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -(2 + \frac{h^2}{x_2}) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -(2 + \frac{h^2}{x_3}) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -(2 + \frac{h^2}{x_{N-1}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2) b.

$$\varepsilon_T = |y_{num} - y_{exakt}| \approx Kh^p$$

Med hjälp av värdena i tabellen får vi

$$\frac{|y_{num}(2; h = 0.2) - y_{exakt}|}{|y_{num}(2; h = 0.1) - y_{exakt}|} = \frac{0.0008}{0.0002} \approx 2^p$$

dvs $p = 2$ och metodens noggrannhetsordning är då 2.

P4. Följande begynnelsevärdesproblem är givet

(2) a. Inför $u = w_1$ och $\dot{u} = w_2$ så erhålles följande system

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_2, & w_1(0) &= 1 \\ \dot{w}_2 &= t - w_1 - w_2, & w_2(0) &= 0\end{aligned}$$

(4) b. Eulers metod för systemet blir

$$\begin{aligned}w_1^{n+1} &= w_1^n + hw_2^n, & w_1^0 &= 1 \\ w_2^{n+1} &= w_2^n + h(t^n - w_1^n - w_2^n), & w_2^0 &= 0 \\ t^{n+1} &= t^n + h, & t^0 &= 0\end{aligned}$$

Med $w_1^0 = 1$, $w_2^0 = 0$ och $h = 0.2$ får vi

$$\begin{aligned}w_1^1 &= w_1^0 + 0.2w_2^0 = 1 + 0.2 \cdot 0 = 1.0 \\ w_2^1 &= w_2^0 + 0.2(t^0 - w_1^0 - w_2^0) = 0 + 0.2(0 - 1 - 0) = -0.2 \\ t^1 &= t^0 + h = 0 + 0.2 = 0.2 \\ w_1^2 &= w_1^1 + 0.2w_2^1 = 1.0 + 0.2 \cdot (-0.2) = 0.96 \\ w_2^2 &= w_2^1 + 0.2(t^1 - w_1^1 - w_2^1) = -0.2 + 0.2(0.2 - 1 - 0.2) = -0.32 \\ t^2 &= t^1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4\end{aligned}$$

(4) c. Följande matlab program räknar ut integralvärdet som funktion av tiden, t

```
clear all
```

```
[tout,wout]=ode45('funp4',[0 10],[1 0]);  
I(1)=0;
```

```
for ii=2:length(tout)  
h= tout(ii)-tout(ii-1);  
I(ii)=I(ii-1)+h/2*(wout(ii-1,1)^2+wout(ii-1,2)^2+wout(ii,1)^2+wout(ii,2)^2);  
end
```

```
figure  
plot(tout,wout(:,1),tout,I,'--')  
title('u(t)' och z(t)')  
xlabel('t')
```

P5. Följande integral är given

- (2) a. Division med 0. Kan använda l'Hospitals regel två gånger och får då

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Alternativ kan serieutveckling användas.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots))}{x^2} = \frac{1}{2}$$

- (2) b. Vi vet att $T(h = \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi}$. Detta ger oss då att

$$T(h = \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}T(h = \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4} \frac{(1 - \cos(\pi/4))}{(\pi/4)^2} = \frac{\pi}{16} + \frac{4}{\pi}(1 - \cos(\pi/4))$$