

**Lösningar till tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
2D1212, tisdag 2006-05-02 kl 9–12**

Tillåtet hjälpmedel: Nada:s Användarhandledning för MATLAB

Betygsgränser: för betyg **D**: minst 20 poäng, för betyg **C**: över 26p, för betyg **B** över 29p (inklusive bonuspoäng). Resultat med poäng i intervallet $18 \leq p \leq 19.5$ kan efter komplettering ge betyg **E**. Svar ska motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

P0. Ange hur många bonuspoäng du fått vt-06.

P1. Diverse begrepp

(2) a. Vill beräkna

$$\int_a^b f(x)dx$$

Dela in integrationsintervallet i n delintervall av längd $h = (b-a)/n$. Trapetsregeln lyder då

$$T(h) = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right)$$

där $f_0 = f(a)$, $f_i = f(x_i)$ och $f_n = f(b)$. Trapetsregeln har noggrannhetsordningen 2, dvs $\varepsilon_T = Kh^2$.

(2) b. En matris som är gles har få nollskilda element. För dessa finns effektiva algoritmer för LU faktorisering samt effektivt för minneshanteringen eftersom man inte behöver lagra alla nollor.

(2) c. Konvergensordning 2 för Newtons metod innebär att $h_{n+1} = Kh_n^2$.

(2) d. Explicit metod: Euler framåt

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Givet y_i kan vi direkt beräkna y_{i+1} .

Implicit metod: Euler bakåt

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Här ingår y_{i+1} i högerledet och vi måste vidta någon typ av åtgärd innan y_{i+1} kan beräknas.

P2. Ekvationslösning

(2) a. Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 + x_k - 1}{3x_k^2 + 1}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

(2) b. Fixpunktsmetoden:

$$x_{n+1} = 1 - x_n^3$$

Konvergerar metoden? Kravet för konvergens är att $|G'(x)| < 1$ nära roten. Med $G(x) = 1 - x^3$ får vi $G'(x) = -3x^2$ och $|G'(0.7)| = 1.47$, dvs metoden konvergerar ej.

(1) c. Svar: nej!

P3. Derivata-approximation

(2) a. Derivatan approximeras med

$$f'(0) = \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Med $h = 0.25$ och $h = 0.5$ får vi

$$f'(0)_{0.25} = \frac{0.24 - 0}{0.25} = 0.96$$

$$f'(0)_{0.5} = \frac{0.46 - 0}{0.5} = 0.92$$

(2) b. Derivatan approximeras med

$$f'(0) = \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h}$$

Med $h = 0.25$ och $h = 0.5$ får vi

$$f'(0)_{0.25} = \frac{-0.46 + 4 * 0.24 - 3 * 0}{0.5} = 1$$

$$f'(0)_{0.5} = \frac{-0.87 + 4 * 0.46 - 3 * 0}{0.5} = 0.97$$

(2) c. Trunkeringsfelet ges av $\varepsilon_{trunk} = f'(0)_{exakt} - f'(0)_{approx} \approx Kh^p$ där p är noggrannhetsordningen.

I a) får vi $\varepsilon_{trunk}(0.25) = 1.01 - 0.96 = 0.05$ och $\varepsilon_{trunk}(0.5) = 1.01 - 0.92 = 0.09$, dvs $2^p = 0.09/0.05$ vilket ger $p = 1$.

I b) får vi $\varepsilon_{trunk}(0.25) = 1.01 - 1 = 0.01$ och $\varepsilon_{trunk}(0.5) = 1.01 - 0.97 = 0.04$, dvs $2^p = 0.04/0.01$ vilket ger $p = 2$.

(2) d. Använd taylorutvecklingarna

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)$$
$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) + O(h^3)$$

P4. Kurvanpassing

(2) a. Vi har 5 givna punkter vilket betyder att gradtalet på polynomet blir 4. Linjära ekvationssystemet för att bestämma koefficienterna blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.25^4 & 0.25^3 & 0.25^2 & 0.25 & 1 \\ 0.5^4 & 0.5^3 & 0.5^2 & 0.5 & 1 \\ 0.75^4 & 0.75^3 & 0.75^2 & 0.75 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.24 \\ 0.46 \\ 0.68 \\ 0.87 \end{pmatrix}$$

(1) b. Vad blir c_0 ? $c_0 = 0$

(3) c.

```
clear all
x=[0 0.25 0.5 0.75 1]';
y=[0 0.24 0.46 0.68 0.87]';
A=[x.^4 x.^3 x.^2 x ones(size(x))];
b=y;
c=A\b;
x_plot=[0:0.1:1];
p=c(1)*x_plot.^4 + c(2)*x_plot.^3 + c(3)*x_plot.^2 + c(4)*x_plot + c(5);
plot(x_plot,p,x,y,'*')
```

P5. Differentialekvation

(2) a. Inför $u_1 = y$ och $u_2 = y'$. Då får vi systemet

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_1 \sqrt{x} \\ u_1(0) &= 0 \\ u_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

(3) b. Euler metod för systemet blir

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} &= u_1^n + hu_2^n \\ u_2^{n+1} &= u_2^n + h(u_1^n \sqrt{x_n}) \end{aligned}$$

Med $u_1^0 = 0$, $u_2^0 = 1$ och $h = 0.2$ får vi

$$u_1^1 = 0 + 0.2 * 1 = 0.2$$

$$u_2^1 = 1 + 0.2 * 0 = 1$$

$$u_1^2 = 0.2 + 0.2 * 1 = 0.4$$

$$u_2^2 = 1 + 0.2(0.2\sqrt{0.2}) =$$

[(3) c.] Skapa en funktion som definierar högerledet, **tentauppg5.m**:

```
function f=tentauppg5(x,u);
```

```
f=[u(2);u(1)*sqrt(x)];
```

Huvudprogrammet anropar **ode45** samt plottar lösningen.

```
clear all  
[x,y]=ode45('tentauppg5',[0 10],[0;1]);  
plot(x,y(:,1),x,y(:,2),'--')  
legend('y(x)','yprim(x)')
```