

**Tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
2D1212, måndag den 3 maj 2004, kl 9–12**

Tillåtet hjälpmedel: Nada:s Användarhandledning för MATLAB.

Betygsregler: för betyg 3 minst 20p, för betyg 4 minst 27p på inklusive bonuspoäng. Svar ska motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

P0. Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (program och år) där poängen erhöles.

P1. Diverse begrepp.

- a. (2) Vad betyder det att en metod har noggrannhetsordning p ? Ge ett exempel som förklarar begreppet.
- b. (2) Förklara hur ett loglog-diagram används för att skatta en metods noggrannhetsordning. Vilka storheter plottas mot varandra? Hur utläses noggrannhetsordningen?
- c. (2) Vissa metoder för lösning av ordinära differentialekvationer uppvisar instabilitet när steglängden blir för stor. Hur känner man igen instabilitet, vad innebär det?
- d. (2) Man startar med en godtycklig vektor $\mathbf{x}_0$, och beräknar successivt värdena $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$, etc. (oftast med normalisering av den erhållna vektorn i varje steg). Mot vilken storhet väntas dessa iterationer att konvergera? Vad kallas metoden?

P2. En icke-linjär ekvation.

- a. (2) Ekvationen $x = 0.2e^{2x}$ ska lösas med Newtons metod. Ställ upp iterationsformeln för denna ekvation och utför en iteration (handräkning) med startapproximationen $x_0 = 0$.
- b. (1) Ange villkoret för att fixpunktsiteration för samma ekvation med iterationsformeln $x_{n+1} = 0.2e^{2x_n}$ ska konvergera.

P3. Icke-linjärt ekvationssystem.

(4) En lösning till

$$2e^{x-y} = 2.01 - 2y \quad e^{x+y} = 0.99 + x$$

ligger i närheten av $x = y = 0$.

Beräkna en bättre approximation till lösningen genom att göra en iteration med Newtons metod. Ställ upp det linjära ekvationssystem som erhålles i den första iterationen för startgissningen $x = 0$, $y = 0$. Ekvationssystemet behöver ej lösas.

Vänd!

P4. Givet följande tre (x, y) -värden: $(1, 4)$, $(2, 2)$ och $(3, 1)$.

- a. (2) Anpassa en rät linje till de tre punkterna i minstakvadratmetodens mening.
- b. (2) Formulera en algoritm med några Matlabsatser som interpolerar ett andragrads-
polynom genom punkterna.
- c. (2) Anpassa parametrarna a och b i funktionen $y = a/(b + x)$ till punkterna i minsta
kvadratmetodens mening. Ledning: Invertera först uttrycket!

P5. Initialvärdesproblem och integration.

- a. (1) Givet initialvärdesproblemet

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x \cdot y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentia-
lekvationer.

- b. (3) Använd handräkning med Eulers framåtmetod för att skatta värdena av $y(0.4)$
och $y'(0.4)$, med steglängden $h = 0.2$. Vilken noggrannhetsordning har Eulers fram-
åtmetod?
- c. (2) Utnyttja dina beräknade värden i b)-uppgiften för att bestämma $\int_0^{0.4} y(x) dx$ med
trapetsregeln och steglängden $h = 0.2$.
Har du inte räknat b)-uppgiften så får du i stället räkna med följande *fiktiva* värden:
 $y(0.2) = 0.28$ och $y(0.4) = 0.44$.
- d. (2) När integralen i c)-uppgiften beräknas med stegen $h = 0.02, 0.01$ och 0.005 (steg-
längden är densamma för både Eulers metod och trapetsregeln) uppskattar man
felen till $7.5 \cdot 10^{-4}$, $3.9 \cdot 10^{-4}$ och $2.0 \cdot 10^{-4}$. Uppskatta noggrannhetsordningen ur
ovanstående värden och försök förklara varför noggrannhetsordningen ej blir 2, som
den borde vara då trapetsregeln används.

P6. Randvärdesproblem.

Givet är randvärdesproblemet

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x \cdot y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

- a. (3) Inför lämpliga beteckningar och ställ upp en differensapproximation som kan
användas för finita differensmetoden.
Vilken noggrannhetsordning får den numeriska lösningen?
- b. (3) Välj steglängden $h = 0.2$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som erhålls då
finita differensmetoden används. Hur många ekvationer erhålls?
Har matrisen i detta system någon egenskap som kan utnyttjas för att lösa systemet
med färre antal operationer än när vanlig Gauss-elimination används? Förklara!
Obs: Du behöver inte lösa ekvationssystemet.