

**Lösningar till tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
2D1212, måndag den 3 maj 2004, kl 9–12**

P1. Diverse begrepp.

- a. En metod sägs ha noggrannhetsordning p om trunkeringsfelet $E_h \approx Ch^p$, där h är steglängden och C en konstant.
- b. Om man plottar felet som funktion av steglängden i ett log-log diagram (vid lösning av en ordinär differentialekvation eller vid numerisk integrering) kan man genom att mäta lutningen på linjen utläsa metodens noggrannhetsordning.

$$E_h \approx Ch^p$$
$$\log(E_h) \approx \log(C) + p \log(h)$$

- c. När en metod är instabil kommer den numeriska lösningen att divergera, d v s den kommer inte att konvergera mot den exakta lösningen.
- d. Iterationen kommer att konvergera mot den egenvektor som motsvarar det till beloppet största egenvärdet till A . Metoden kallas potensmetoden.

P2. En icke-linjär ekvation.

- a. Newtons metod givet x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{för } n = 1, 2, \dots$$

blir i det här fallet

$$x_0 = 0$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{0.2e^{2x_n} - x_n}{0.4e^{0.2x_n} - 1}$$

och en iteration ger att

$$x_1 = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- b. Fixpunktsiterationen

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

konvergerar om $|\phi'(x)| < 1$ för alla x i ett litet intervall kring roten. Här är $\phi(x) = 0.2e^{2x}$ och metoden konvergerar om $|\phi'(x)| = |0.4e^{2x}| < 1$.

P3. Icke-linjärt ekvationssystem.

Ekvationssystemet ges av $f(x) = 0$, där

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2e^{x-y} - 2.01 + 2y \\ e^{x+y} - 0.99 - x \end{pmatrix}$$

Newtons metod för ett icke-linjärt system, givet en startgissning $x = x_0$, kan skrivas på följande sätt

$$x_{n+1} = x_n - J^{-1}(x_n)f(x_n), \quad \text{för } n = 1, 2, \dots$$

J är systemets Jacobianmatris och blir i det här fallet

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{x-y} & -2e^{x-y} + 2 \\ e^{x+y} - 1 & e^{x+y} \end{pmatrix}$$

Med startgissningen $x_0 = (0, 0)$ får vi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

och det linjära ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

P4. a. Följande linjära funktion

$$y = c_0 + c_1x$$

skall anpassas till givna data. Med insatta värden, leder detta till följande överbestämda linjära ekvationssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}}_c \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_y$$

Minstakvadratlösningen till detta system ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A c = A^T y$ dvs

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

och vi får att $c_0 = 16/3$ och $c_1 = -3/2$ och den rätta linjen blir $y = 16/3 - 3x/2$.

b. Ansätt ett andragradspolynom: $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Vi får nu följande linjära ekvationssystem att lösa för koefficienterna c_0, c_1 och c_2

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 &= 4 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 &= 2 \\ c_0 + 3c_1 + 9c_2 &= 1 \end{aligned}$$

```
% Interpolation av ett andragradspolynom genom 3 punkter
clear all
x=[1 2 3]';
y=[4 2 1]';
A=[ones(size(x)) x x.^2];
c = A \ y;
X=[1:0.1:3]';
P=c(1) + c(2)*X + c(3)*X.^2;
```

c. Invertering av uttrycket ger

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a}x$$

Låt $1/y = \tilde{y}$, $b/a = c_0$ och $1/a = c_1$. Då får vi $\tilde{y} = c_0 + c_1x$. Detta löses på samma sätt som i uppgift a), dvs minsta kvadratlösningen ges av

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 17/4 \end{pmatrix}.$$

Med $c_0 = -1/6$ och $c_1 = 3/8$ får vi att $a = 8/3$ och $b = -4/9$.

P5. Initialvärdesproblem och integration.

a. Inför $y = u_1$ och $dy/dx = u_2$ så erhålles följande system

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= u_2, & u_1(0) &= 0 \\ \frac{du_2}{dx} &= xu_1, & u_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

b. Eulers metod för systemet blir

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} &= u_1^n + hu_2^n, & u_1^0 &= 0 \\ u_2^{n+1} &= u_2^n + hx^n u_1^n, & u_2^0 &= 1 \\ x^{n+1} &= x^n + h, & x^0 &= 0 \end{aligned}$$

Med $u_1^0 = 0$, $u_2^0 = 1$ och $h = 0.2$ får vi

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_1^0 + 0.2u_2^0 = 0 + 0.2 \cdot 1 = 0.2 \\ u_2^1 &= u_2^0 + 0.2x^0 u_1^0 = 1 + 0.2 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\ x^1 &= x^0 + h = 0 + 0.2 = 0.2 \\ u_1^2 &= u_1^1 + 0.2u_2^1 = 0.2 + 0.2 \cdot 1 = 0.4 \\ u_2^2 &= u_2^1 + 0.2x^1 u_1^1 = 1 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 1.008 \\ x^2 &= x^1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4 \end{aligned}$$

och $y(0.4) = 0.4$ och $y'(0.4) = 1.008$.

Metoden har noggrannhetsordning ett.

c. Trapetsregeln ger för detta fall

$$T(0.2) = 0.2\left(\frac{y(0)}{2} + y(0.2) + \frac{y(0.4)}{2}\right) = 0.2(0 + 0.2 + 0.2) = 0.08$$

d. Noggrannhetsordningen kan bestämmas med hjälp av antagandet att felet $E(h) = T(h) - I \approx Ch^p$, där p är noggrannhetsordningen. Vi har då

$$\left| \frac{E(h) - E(h/2)}{E(h/2) - E(h/4)} \right| \approx \left| \frac{Ch^p - C\left(\frac{h}{2}\right)^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p - C\left(\frac{h}{4}\right)^p} \right| = \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2^p} - \frac{1}{4^p}} = 2^p.$$

Med givna data får vi

$$\left| \frac{E(0.02) - E(0.01)}{E(0.01) - E(0.005)} \right| = \left| \frac{7.5 - 3.9}{3.9 - 2.9} \right| = \frac{3.6}{1.9} \approx 2$$

och p kan räknas ut genom $\log(2) = p \log(2)$, dvs $p = 1$ och noggrannhetsordningen är ett. Anledningen till detta är att

$$I = T(h) + \mathcal{O}(h^2) = \tilde{T}(h) + \underbrace{\frac{h}{2}(c_1h + c_2h + \dots c_Nh)}_{\tilde{c}h(b-a)} + \mathcal{O}(h^2) = \tilde{T}(h) + \mathcal{O}(h).$$

Värdena vi använder för att räkna ut $T(h)$ är behäftade med fel som är proportionella mot h eftersom vi har använt Eulers metod för att räkna ut dessa.

P6. Randvärdesproblem.

Dela in $x = [0, 1]$ i ett antal delintervall av längden h och låt $x_j = jh$ där $j = 0, 1, 2, \dots, N+1$ och $h = 1/(N+1)$. Låt $y_j \approx y(x_j)$ och approximer derivatan med en differensapproximation enligt

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - x_j y_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$y_0 = 0 \quad y_{N+1} = 1$$

Denna metod har noggrannhetsordning två.

- b. Med $h = 0.2$ får vi fyra ekvationer för de fyra obekanta y_j , $j = 1, 2, 3, 4$ och ekvationssystemet blir

$$\frac{y_2 - 2y_1 + 0}{h^2} - x_1 y_1 = 0$$

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - x_2 y_2 = 0$$

$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} - x_3 y_3 = 0$$

$$\frac{1 - 2y_4 + y_3}{h^2} - x_4 y_4 = 0$$

eller på matris-vektor form

$$\begin{pmatrix} -(2 + h^2 x_1) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(2 + h^2 x_2) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -(2 + h^2 x_3) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -(2 + h^2 x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Detta är ett tridiagonalt system och kan lösas med i storleksordningen N antal operationer istället för N^3 .