

Tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
2D1212, torsdag 2004-08-26 kl 14–17

Tillåtet hjälpmedel: Nada:s Användarhandledning för MATLAB

Betygsgränser: för betyg **3**: minst 20 poäng, för betyg **4**: minst 27p (inklusive bonuspoäng). Svar ska motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

P0. Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (program och år) där poängen erhöles.

P1. Diverse begrepp

- a. (2) Exemplifiera med 3×3 -matriser vad som menas med en a) diagonal, b) tridiagonal, c) triangulär och d) symmetrisk matris
- b. (3) De två grundläggande idéerna i Newton-Raphsons metod för lösning av ekvationen $f(x) = 0$ är iteration och *lokal approximation med rät linje*. Vad är det som approximeras med *vilken* rät linje och vad menas med iteration?
- c. (2) En numerisk metod för beräkning av en integral $\int_a^b f(x)dx$ ger det numeriska värdet $Q(h)$ då den konstanta steglängden h används. Vad menas med att metoden har noggrannhetsordningen 3?
- d. (4) Om Gausselimination av ett ekvationssystem med 20 obekanta och *fylld* systemmatris kräver 0.08 sek, hur lång tid skulle det ta att lösa ett liknande ekvationssystem med 100 obekanta?
Om systemmatrisen är *tridiagonal* i ett ekvationssystem med 2000 obekanta tar det 0.5 sek att lösa ekvationssystemet. Hur lång tid tar det att lösa ett liknande system med 10000 obekanta?

P2. Kurvanpassning och båglängdsberäkning

Följande information om en funktion $f(x)$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ finns givet:

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 4 \quad (*)$$

- (2) a. Approximera $f(x)$ med ett polynom av gradtal 2.
- (4) b. Nu vill vi beräkna båglängden b hos kurvan som uppstår om man plottar polynomet $f(x)$ mellan $x = -1$ och $x = 1$. Skissera en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som med hjälp av trapetsmetoden räknar ut båglängden för tre olika steglängder $h = 0.5$, $h = 0.25$ och $h = 0.125$.
Ledning: Båglängden b räknas ut med formeln $b = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- (2) c. Antag att $f(x)$ förutom villkoren (*) i a) även ska uppfylla villkoret $f'(0) = 0$. Bestäm det tredjegradspolynom som uppfyller alla fyra villkoren.

VÄND!

P3. Ekvationslösning

Följande andragradsekvation

$$x^2 + x - 2 = 0$$

har två rötter, en i $x = 1$ och en i $x = -2$.

- (2) **a.** Ekvationen ska lösas med Newtons metod. Ställ upp iterationsformeln för denna ekvation och utför en iteration med startvärdet $x_0 = -3$.
- (3) **b.** Vilken av följande två fixpunktsiterationer kommer att konvergera mot roten $x = -2$ om lämpligt startvärde välj? Svaret måste motiveras noggrant.

$$x_{n+1} = 2 - (x_n)^2 \quad (1)$$

$$x_{n+1} = \frac{2}{x_n} - 1 \quad (2)$$

P4. Dämpad pendelrörelse

Differentialekvationen för en pendel som svänger med små utslagsvinklar och kraftig dämpning lyder:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y - \frac{dy}{dt}, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

- (2) **a.** Skriv om ovanstående differentialekvation till ett system på vektorform bestående av första ordningens differentialekvationer. Ange även den begynnelsevektor som hör till detta system.
- (3) **b.** Använd Eulers metod, $h = 0.2$, för att beräkna en approximativ lösning till $y(0.2)$ och $y(0.4)$.
- (4) **c.** Skissera en algoritm, gärna i form av ett Matlabprogram, som med Eulers metod, steget $h = 0.01$ löser differentialekvationen fram till tidpunkten $T = 10$. Programmet ska även plotta lösningen fram till denna tidpunkt.
- (2) **d.** För att beräkna lösningen med en noggrannare metod används Matlabfunktionen `ode45`. Skissera ett Matlabprogram som löser differentialekvationen fram till den tidpunkt T som definieras i c).