

Tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
2D1212, måndag 2005-05-02 kl 10–13

Tillåtet hjälpmedel: Nada:s Användarhandledning för MATLAB

Betygsgränser: för betyg **D**: minst 20 poäng, för betyg **C**: över 26p, för betyg **B** över 29p (inklusive bonuspoäng). Poäng i intervallet $18 \leq p \leq 19.5$ kan efter komplettering ge betyg **E**. Svar ska motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

P0. Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (program och år) där poängen erhållits.

P1. Diverse begrepp

- a. (2) Vad menas med en gles $n \times n$ -matris A ? Ange två skäl till att gleshantering av en sådan matris är fördelaktigt vid lösning av ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- b. (2) Man vill anpassa ett polynom till en given uppsättning punkter (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, m$. Man kan använda interpolation eller minsta kvadratmetoden. Förklara kortfattat skillnaden mellan dessa två metoder.
- c. (2) Newtons metod för numerisk lösning av en ekvation $f(x) = 0$ lyder: $x_{k+1} = x_k - h_k$, där $h_k = f(x_k)/f'(x_k)$. Antag att startvärdet x_0 ger en iterationsföljd som konvergerar mot roten α . Vilka två av storheterna x_k , $f(x_k)$, $f'(x_k)$ och h_k konvergerar då mot noll?
- d. (2) Förklara skillnaden mellan en *explicit* resp *implicit* metod för lösning av ett begynnelsevärdesproblem, gärna med hjälp av exempel.

P2. Ekvationslösning

Givet ekvationen $e^x + ax = 0.5$, där $a > 0$ är en parameter.

- (1) a. Motivera med en geometrisk figur eller på annat sätt att ekvationen har endast en rot α och att den är negativ.
- (3) b. Formulera Newtons metod för ekvationen och beskriv en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som för $a = 1$ beräknar roten α med 4 korrekta decimaler utifrån startvärdet $x_0 = -0.2$.
- (3) c. Om ekvationen skrivs om på formen $x = 0.5 - e^x$ kan fixpunktsmetoden användas. Formulera metoden och avgör om den kommer att konvergera eller inte. Startvärdet x_0 i b) är en hyfsad approximation till roten. $e^{x_0} \approx 0.8$.

P3. Givet randvärdesproblemet

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 2, \quad 1 \leq x \leq 3$$

- (4) a. Antag att intervallet $[1, 3]$ delas in i N lika stora steg h . Diskretisera problemet med användning av lämplig differensapproximation av andraderivatan och skissera hur det linjära ekvationssystem ser ut som definierar den numeriska lösningen.

- (2) b. Den numeriska lösningen beräknas för olika N och y -värdet i intervallets mittpunkt skrivs ut. Uppskatta ur denna tabell *noggrannhetsordningen* i resultatet. Ledning: Det värde som är uträknat för den minsta steglängden kan anses vara det exakta värdet.

h	y(2)
0.2	1.1879
0.1	1.1873
0.01	1.1871

P4. Följande begynnelsevärdesproblem är givet

$$\ddot{u} + \dot{u} + u = t, \quad u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0, \quad (*) \quad , \quad \text{där } \dot{u} = \frac{du}{dt}, \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

- (2) a. Skriv om differentialekvationen (*) som ett system av två första ordningens differentialekvationer.
- (4) b. Formulera Eulers framåtmetod för systemet i a) och räkna sedan två steg framåt med användning av steglängden $h = 0.2$.
- (4) c. Följande integral är kopplad till problemet (*):

$$z(t) = \int_0^t ((u(s))^2 + (\dot{u}(s))^2) ds$$

Skissera en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som 1) löser differentialekvationen på tidsintervallet $[0, 10]$ t ex med Matlabs ODE-lösare ode45, därefter beräknar $z(t)$ på samma tidsintervall samt slutligen plottar $u(t)$ och $z(t)$ i samma diagram.

Ledning: Tänk på trapetsregeln, men med variabelt steg.

P5. Följande integral är given

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$$

- (2) a. När trapetsregeln används uppstår ett problem i en av intervallets ändpunkter. Vilket problem, och hur avhjälps det?
- (2) b. Med steglängden $h = \pi/2$ erhålles trapetsvärdet $\pi/8 + 1/\pi$. Vilket trapetsvärde erhålls för $h = \pi/4$ (här räcker det med att ange ett uttryck innehållande π och andra tal)?