DN1212 Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
DN1214 Numeriska Metoder för S
Lördag 2007-11-17, kl 9-12

Skrivtid 3 tim. **Maximal poäng** 35 + bonuspoäng från årets laborationer (max 4p).

Betygsgänser: för betyg **D**: minst 20 poäng, för betyg **C**: över 26 poäng och för betyg **B**: över 29 poäng. Alla poäng är inklusive bonuspoäng.

Maxpoäng för uppgifterna anges inom parentes bredvid uppgiftsnumret

Tillåtna hjälpmedel: Nadas användarhandledning för MATLAB.
För icke-svenskspråkiga tillåts också lexikon.

Var god notera att miniräknare **ej** är tillåten på denna tentamen.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Då algoritmbeskrivning begärs, avses normalt beskrivning i MATLAB.

Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade, tex $c = 0.5 \cdot 0.2^3 \cdot \cos(\pi/3)$ i stället för det uträknade $c = 0.002$

( ) **P0.** Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (linje och termin) där poängen erhållits. Endast poäng från 2007 är giltiga.

P1. Diverse begrepp

(1) a) Vad innebär Runges fenomen och när kan det uppstå?

(1.5) b) Ge ett exempel på en 4×4 tridiagonal matris (med siffervärden insatta) och beräkna maximumnormen av denna matris.

(1) c) Att lösa ett linjärt $N \times N$-ekvationssystem på en viss dator tar 3 mikrosekunder. Hur lång tid tar det att på samma dator lösa ett system med dubbelt så många rader och kolumner om matrisen är full?

(2.5) d) Givet ekvationen $10x = e^x$. Visa med en formel hur man kan använda fixpunktsmetoden för att lösa denna ekvation. Vad gäller för att fixpunktsmetoden skall konvergera? (Du behöver ej bevisa att din formel konvergerar, bara redogöra för vad kraven är).

Tentamen fortsätter på nästa sida. Var god vänd!

P2. Givet integralen

$$\int_{1.2}^{2.0} \sin(x^2)\,dx$$

(2) **a)** Ställ upp uttrycken för trapetsregeln med dels steglängd 0.4 och dels steglängd 0.2

(1) **b)** Man har gjort trapetsregelberäkningar med tre olika steglängder $T_1 = T(h)$, $T_2 = T(2h)$ och $T_3 = T(4h)$. Visa hur dessa värden bör kombineras för att erhålla en, i normala fall, bättre skattning av integralvärdet.

(1) **c)** Hur kan man skatta trunkeringsfelet i integralvärdet i deluppgift **b** ovan

(1) **d)** Hur kan man kolla regelbundenheten i trapetsregelvärdena i deluppgift **b** ovan?

P3. Givet följande tabell

x	11	12	14	16
f	1	3	23	67

(3) **a)** Lägg ett interpolationspolynom genom de tre sista tabellpunkterna, (dvs $x = 12,\ 14$ och 16) med hjälp av Newtons ansats. Alla koefficienter skall beräknas och dina kalkyler redovisas. (Handräkning)

(2) **b)** Använd dina redan utförda beräkningar i deluppgift **a** ovan. för att bestämma det interpolationspolynom som går igenom alla fyra tabellpunkterna. Redovisa alla beräkningar.

P4. Givet tabellen nedan

t	0	1	2	3	4
z	1	2	3	4	6

(4) **a)** Beräkna parametrarna α och γ då man anpassar kurvan

$$z(t) = \alpha(t-2)^2 + \gamma(t-1)$$

till samtliga mätdata med minstakvadratmetoden.

(5) **b)** Skriv ett Matlab-program som beräknar parametrarna α, β, γ och δ då man anpassar kurvan

$$z(t) = \alpha(t-\beta)^2 + \gamma(t-\delta)^4$$

till samtliga mätdata med minstakvadratmetoden.

P5. Givet differentialekvationsproblemet

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -2\,z\,y \\ z - \ddot{z} &= 1 \end{aligned} \qquad \text{med} \qquad \begin{aligned} z(10) &= 2 & \quad y(10) &= 1 \\ \dot{z}(10) &= 3 & \quad \dot{y}(10) &= 0 \end{aligned}$$

(2) **a)** Skriv om differentialekvationsproblemet till ett system av första ordningen (dvs standardform/vektorform). Glöm inte initialvillkoren.

(3) **b)** Skatta $y(14)$ och $z(14)$ med (explicita) Eulers metod och steget 2.

(3.5) **c)** Skriv ett Matlab-program som (med valfri metod) skattar och plottar $y(t)$ och $z(t)$ (och inget annat) på intervallet $10 \le t \le 15$. Kurvan ska se rimligt slät ut.

(1.5) **d)** Definiera $w(t) = \dot{y}(t)/\dot{z}(t)$. Plotta även $w(t)$ på samma intervall.

Lycka till och gott fortsatt "nummande" önskar Ninni & Beatrice!

Kort förslag till lösning

P1a Kurvan svänger ut väldigt (fra i ytterkanterna) mellan de givna punkterna vid interpolation av hög grad.

P1b

$$\text{Tex}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} ||A|| = 21$$

(Maximumnormen av en natris är summan av tyngsta raden.)

P1c Arbetet att lösa ett fullt system är proportionellt mot N^3. Ett dubbelt så stort system blir då $(2N)^3 = 8N^3$, dvs tar 8 gånger så lång tid. Det tar då $8 \cdot 3 = 24$ mikrosekunder.

P1d Skriv om ekvationen så att man får ett "ensamt" x på ena sidan likhetstecknet, $x = G(x)$. Iterera sedan $x_{n+1} = G(x_n)$. Metoden konvergerar mot roten x^* om startvärdet x_0 ligger nära roten och $|G(x^*)| < 1$. Här tex

$$10x = \mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; x_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{x_n}}{10} \;\Rightarrow\; |\frac{\mathrm{e}^x}{10}| < 1$$

eller

$$10x = \mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; x_{n+1} = \log(10x) \;\Rightarrow\; |1/x| < 1$$

P2a

$$T(0.4) = 0.4 \cdot \left\{ \frac{1}{2}\sin(1.2^2) + \sin(1.6^2) + \frac{1}{2}\sin(2.0^2) \right\}$$

$$T(0.2) = 0.2 \cdot \left\{ \frac{1}{2}\sin(1.2^2) + \sin(1.4^2) + \sin(1.6^2) + \sin(1.8^2) + \frac{1}{2}\sin(2.0^2) \right\}$$

P2b $\hat{T}(h) = T(h) + \frac{T(h)-T(2h)}{3}$ dvs $\hat{T}_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{3}$.

P2c Trunkeringsfelet i $\hat{T}_1$ skattas som $E_{\hat{T}_1} = |\hat{T}_1 - \hat{T}_2|$ där
$\hat{T}_1$ definieras i **P2b** ovan och $\hat{T}_2 = T_2 + \frac{T_2 - T_3}{3}$.

P2d $(T_3 - T_2)/(T_2 - T_1) \approx 4$, dvs ändringen i trapetregelvärdena skall avta cirka en faktor fyra.

P3a Tre punkter innebär ett andragradspolynom. Newton ansats för ett andragradspolynom är $y(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2)$. Välj tex $x_1 = 12,\; x_2 = 14$ och $x_3 = 16$.

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x_1) = c_1 + 0 + 0 \\ y_2 &= y(x_2) = c_1 + c_2(x_2 - x_1) + 0 \\ y_3 &= y(x_3) = c_1 + c_2(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{aligned} \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} c_1 &= y_1 = 3 \\ c_2 &= (y_2 - c_1)/(x_2 - x_1) = (23 - 3)/(14 - 12) = 10 \\ c_3 &= (y_3 - c_1 - c_2(x_3 - x_1))/((x_3 - x_1)(x_3 - x_2)) = (67 - 3 - 10 \cdot 4)/((16 - 12)(16 - 14)) = 24/8 = 3 \end{aligned}$$

P3b Fyra punkter innebär ett tredjegradspolynom. Newton ansats för ett tredjegradspolynom är $y(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + c_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Välj de första tre punkterna samma som i **P3a** ovan, dvs $x_1 = 12,\; x_2 = 14$ och $x_3 = 16$. Då blir de tre första koefficienterna desamma, dvs $c_1 = 3,\; c_2 = 10$ och $c_3 = 3$. Återstår bara att beräkna c_4.

$$y_4 = y(x_4) = c_1 + c_2(x_4 - x_1) + c_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) + c_4(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c_4 = \frac{y_4 - c_1 - c_2(x_4 - x_1) - c_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} =$$

$$= \frac{1 - 3 - 10 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) \cdot (-3)}{(11 - 12)(11 - 14)(11 - 16)} = \frac{1 - 3 + 10 - 9}{(-15)} = \frac{1}{15} \approx 0.067$$

P4a Sätt in mätvärdena i formeln:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha(t_1 - 2)^2 + \gamma(t_1 - 1) \\ z_2 &= \alpha(t_2 - 2)^2 + \gamma(t_2 - 1) \\ z_3 &= \alpha(t_3 - 2)^2 + \gamma(t_3 - 1) \\ z_4 &= \alpha(t_4 - 2)^2 + \gamma(t_4 - 1) \\ z_5 &= \alpha(t_5 - 2)^2 + \gamma(t_5 - 1) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lös det överbestämda systemet $Ac = b$ med normalekvationerna $A^T A\, c = A^T b$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \qquad A^T b = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 34 & 10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 28 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 41 & 0 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 23/41 \\ \gamma &= (28 - 10\alpha)/15 \end{aligned}$$

(Starta med normalekvationerna: Dela först rad ett med två ($17\alpha + 5\gamma = 17$). Multiplicera den sedan med tre ($51\alpha + 15\gamma = 51$). Subtrahera sedan rad2 från rad1 ($(51 - 10)\alpha + 0\gamma = (51 - 28)$).) (Det ger $\alpha = 23/41 \approx 0.5$ och $\gamma \approx 23/15 \approx 1.5$).

P4b Parametrarna β och δ förekommer ickelinjärt - det blir ett ickelinjärt minstakvadratproblem. Lös med Gauss-Newtons metod. Metoden behöver startgissningar på samtliga parametrar α, β, γ och δ. Svårgissat! Men z ökar med ökande t så vi kan gissa små positiva tal på samtliga parametrar, tex 1. Låt $\bar{f} = \alpha(\bar{t} - \beta)^2 + \gamma(\bar{t} - \delta)^4 - \bar{z}$. Det ger Jacobi-matrisen

$$J = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \beta} & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \gamma} & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\bar{t} - \beta)^2 & -2\alpha(\bar{t} - \beta)^1 & (\bar{t} - \delta)^4 & -4\gamma(\bar{t} - \delta)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

och programmet

```
t=(0:4)';
z=[1 2 3 4 6]';
c=[1 1 1 1]';
h=1;
while norm(h)>1e-6;
     f=c(1)*(t-c(2)).^2 + c(3)*(t-c(4)).^4 - z ;
     J=[(t-c(2)).^2, -2*c(1)*(t-c(2)), (t-c(4)).^4, -4*c(3)*(t-c(4)).^3];
     h=J\f;
     disp([c h])
     c=c-h;
end;
alfa=c(1), beta=c(2), gamma=c(3), delta=c(4)
```

(Faktum är att startgissningen $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ inte var så lysande bra. Kör man programmet behövs hela 49 iterationer innan den konvergerar till lösningen $\alpha = -0.65$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.0034$ och $\delta = -4.16$, men programmet konvergerar i alla fall!)

P5a Vi har två andra ordningens differentialekvationer, $\ddot{y} = -2zy$ och $\ddot{z} = z - 1$. Då behövs $2 \cdot 2 = 4$ hjälpfunktioner. Sätt

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \implies \bar{u}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -2,\ u_3\, u_1 \\ u_4 \\ u_3 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad \bar{u}_0 = \begin{pmatrix} u_1(10) = 1 \\ u_2(10) = 0 \\ u_3(10) = 2 \\ u_4(10) = 3 \end{pmatrix}$$

P5b Steglängden $h = 2$ innebär två steg från $t = 10$ till $t = 14$. Eulers (vanliga=explicita) metod ger $\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + h \cdot \bar{u}_n'$ dvs

$$\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \cdot 2 \cdot 1 \\ 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \cdot 8 \cdot 1 \\ 5 \\ 8 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -40 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Ett kortare/snabbare beräkningssätt är i tabellform

t	u_1	u_2	u_3	u_4	$\dot{u}_1$	$\dot{u}_2$	$\dot{u}_3$	$\dot{u}_4$	$h\dot{u}_1$	$h\dot{u}_2$	$h\dot{u}_3$	$h\dot{u}_4$
10	1	0	2	3	0	-4	3	1	0	-8	6	2
12	1	-8	8	5	-8	-16	5	7	-16	-32	10	4
14	-15	-40	18	19								

Slutsvar: $y(14) = -15$ och $z(14) = 18$.

P5c Välj tex ode45. Den väljer själv en lämplig steglängd.

```
function uprim=dudt(t,u);
uprim=[u(2); -2*u(3)*u(1); u(4); u(3)-1];

[tut,uut]=ode45('dudt',[10 15],[1;0;2;3]);
yut=uut(:,1);
zut=uut(:,3);
plot(tut,yut,tut,zut)
```

P5c Lägg till

```
wut=uut(:,2) ./ uut(:,4);
hold on;
plot(tut,wut)
```

/NC