NADA, KTH, Beatrice Frock, april-04

Lösning till Fiktiv tentamen 2D1212,
Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering

P1. **a.** Sätt in datavärdena i den räta linjens ekvation $y = ax + b$ så får vi ett överbestämt system (3 ekvationer, 2 obekanta)

$$\begin{aligned} a + b &= 4 \\ 2a + b &= 2 \\ 3a + b &= 1 \end{aligned}$$

vilket vi med matris- och vektorbeteckningar skriver

$$A\mathbf{c} \approx \mathbf{y}, \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Minstakvadratösningen till detta överbestämda ekvationssystem ges av normalekvationerna $A^T A\mathbf{c} = A^T\mathbf{y}$ dvs

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b. Ansätt ett andragradspolynom: $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$. Vi får nu 3 ekvationer och 3 obekanta,

$$\begin{aligned} x = 1 \quad &\Rightarrow \quad c_1 + c_2 + c_3 = 4 \\ x = 2 \quad &\Rightarrow \quad 4c_1 + 2c_2 + c_3 = 2 \\ x = 3 \quad &\Rightarrow \quad 9c_1 + 3c_2 + c_3 = 1 \end{aligned}$$

c. Runges fenomen innebär att högre grads interpolationspolynom har oftast en tendens till kraftiga oscillationer nära ändpunkterna. Styckvis lägre grads interpolation är därför att föredra.

P2. **a.** Ekvationssystemet ges av $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, där

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2\cos(x) - 0.08 \\ y^2 - x^2\sin(y) - 0.04 \end{pmatrix}$$

Tillhörande Jacobianmatris är

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y^2\sin(x) & 2y\cos(x) \\ -2x\sin(y) & 2y - x^2\cos(y) \end{pmatrix}$$

Insättning av $x = 0$, $y = 1$ ger en singulär matris

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Insättning av $x = 1$, $y = 0$ ger vänsterledet

$$\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} 0.92 \\ -0.04 \end{pmatrix}$$

Jacobianen blir

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystemet som ska lösas i första iterationen blir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.92 \\ -0.04 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h_0} = \begin{pmatrix} -0.46 \\ -0.04 \end{pmatrix}$$

och $x_1 = 1 - 0.46 = 0.54$, $y_1 = 0 - 0.04 = -0.04$.

P3. **a.** Taylorutveckling av $f(a+h)$ i punkten $x = a$ ger:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + O(h^2)$$

Insättning i formelns högerled ger:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a) + hf'(a) + O(h^2) - f(a)}{h} = f'(a) + O(h)$$

Formeln har noggrannhetsordningen 1.

b. Följande formel har noggrannhetsordningen 2

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

P4. **a.** I trapetsregeln

$$T(h) = h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2})$$

är i detta fall $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$ vilket insatt i $f(x) = sin(\pi x)/(x+1)$ ger $f_0 = 0$, $f_1 = 2/3$, $f_2 = 0$.
Trapetsvärdet blir

$$T(0.5) = 0.5(\frac{0}{2} + \frac{2}{3} + \frac{0}{2}) = \frac{1}{3}$$

b.

```
n=10;h0=1/n;
for h=[h0,h0/2,h0/4]
        x=0:h:1;
        f=sin(pi*x)./(x + 1);
        T=h*(sum(f)-f(1)/2-f(end)/2);
        hT=[h T]
end
```

c. Approximera det exakta integralvärdet I med det trapetsvärde som erhållits för den minsta av de tre steglängderna. Undersök därefter om felet $I - T(h)$ uppför sig som $O(h^2)$, vilket är trapetsregelns noggrannhetsordning. Om steget minskar med en faktor 2 ska felet minska med en faktor 4.

Vi erhåller: $I - T(0.1) = 0.4335 - 0.4299 = 0.0036$ och $I - T(0.05) = 0.4335 - 0.4326 = 0.0009$. Här minskar alltså felet med en faktor 4, dvs felet uppför sig som $O(h^2)$. Anm. värdet 0.4328 i tentan är feltryck; skall vara: 0.4326.

P5. **a.** Inför $y = u_1$ och $dy/dx = u_2$ så erhålles

$$\frac{du_1}{dx} = u_2, \quad u_1(0) = 1$$

$$\frac{du_2}{dx} = 1 - xu_1, \quad u_2(0) = 0$$

b. Eulers metod för systemet:

$$u_1^{(k+1)} = u_1^{(k)} + hu_2^{(k)}, \quad u_1^{(0)} = 1$$

$$u_2^{(k+1)} = u_2^{(k)} + h(1 - x^{(k)}u_1^{(k)}), \quad u_2^{(0)} = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h, \quad x^{(0)} = 0$$

Givet är att $u_1^{(1)} = 1$ samt $u_2^{(1)} = 0.2$ då $h = 0.2$ använts. Vi får då:

$$u_1^{(2)} = u_1^{(1)} + hu_2^{(1)} = 1 + 0.2 \cdot 0.2 = 1.04$$

$$u_2^{(2)} = u_2^{(1)} + h(1 - x^{(1)}u_1^{(1)}) = 0.2 + 0.2 \cdot (1 - 0.2 \cdot 1) = 0.36$$

c. Trunkeringsfelet för Eulers metod är $O(h)$, dvs $\approx ch$, vilket ger $0.001 \approx 0.01c \quad \Rightarrow$ $c = 0.1$. Alltså blir felet då $h = 0.001$ lika med $0.1 \cdot 0.001 = 10^{-4}$.

P6. **a.** Se figuren! För den mindre roten α_1 är värdet av absolutbeloppet av derivatan av iterationsfunktionen $F(x) = 8x - 2x^2 - 6$ större än 1, dvs $|F'(\alpha_1)| > 1$, varför metoden ej konvergerar.
För den större av rötterna, α_2, gäller att $|F'(\alpha_2)| < 1$, dvs metoden konvergerar om startvärdet ligger tillräckligt nära α_2.

b. Se läroboken QS, sid 43

c. $\alpha_2 = 2$, vilket erhålles genom att lösa andragradsekvationen $2x^2 - 7x + 6 = 0$. Derivatan av iterationsfunktionen i punkten $x = 2$ är $F'(2) = 8 - 4 \cdot 2 = 0$, dvs villkoret för kvadratisk konvergens är uppfyllt, se läroboken QS, sid 49.

d. Vi kan alltid använda Newtons metod för att bestämma en rot, dvs i detta fall

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2x_k^2 - 7x_k + 6}{4x_k - 7}, \quad x_0 \, givet$$

om x_0 väljs tillräckligt nära α_1.