NADA, KTH, Lennart Edsberg

FIKTIV Tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
2D1212, xdag den xx-xx-xxxx, kl 8–11

Tillåtet hjälpmedel: Nada:s Användarhandledning för MATLAB,

Betygsregler: för betyg 3 minst 20p, för betyg 4 minst 27p på tentamen inklusive bonuspoäng

Svar ska motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag

P0. Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (linje, termin och år) där poängen erhållits.

P1. Givet följande tre (x, y)-värden: $(1, 4)$, $(2, 2)$ och $(3, 1)$.

- **a. (2)** Anpassa en rät linje till de tre punkterna i minstakvadratmetodens mening. Det räcker med att ställa upp det linjära ekvationssystem som ger koefficienterna till den räta linjen.
- **b. (2)** Interpolera ett andragradspolynom genom punkterna. Det räcker med att ställa upp det linjära ekvationssystem som ger andragradspolynomets koefficienter.
- **c. (2)** Vad innebär Runges fenomen i samband med polynominterpolation?

P2. Följande ekvationssystem ska lösas med Newtons metod;

$$x^2 + y^2 \cos(x) = 0.08$$

$$y^2 - x^2 \sin(y) = 0.04$$

- **a. (2)** Startvärdet $x = 0$, $y = 1$ fungerar inte. Varför?
- **b. (2)** Använd startvärdet $x = 1$, $y = 0$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som ska lösas då man vill genomföra en iteration med Newtons metod. Lös systemet och visa vad nästa iterat blir.

P3. Derivatan av funktionen $f(x)$ i punkten $x = a$ ska beräknas approximativt med en differensformel.

- **a. (1)** Bestäm noggrannhetsordningen för formeln

$$f'(a) \approx (f(a + h) - f(a))/h$$

  Svaret ska motiveras med formler och text.
- **b. (2)** Ange en differensapproximation till $f'(a)$ som har noggrannhetsordningen 2.

P4. Följande integral ska beräknas med trapetsregeln

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x + 1} dx$$

- **a. (2)** Beräkna för hand trapetsvärdet då steglängden $h = 0.5$ används.

b. (2) Ge en algoritm, gärna i form av Matlabkod som beräknar integralvärdet för steglängderna $h, h/2$ och $h/4$. Antalet steg n uppfyller $nh = 1$, där n är ett givet positivt heltal.

c. (2) Följande trapetsvärden $T(h)$ erhölls med användande av olika steglängder: $T(0.1) = 0.4299, T(0.05) = 0.4328, T(0.025) = 0.4335$ Vilken noggrannhetsordning har trapetsregeln? Ger ovanstående värden stöd för den noggrannhetsordningen?

P5. Givet följande differentialekvation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

a) (2) Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer, med tillhörande begynnelsevärden.

b) (2) Formulera Eulers metod för systemet i a). - Med steget $h = 0.2$ blir Eulervärdena för $y(0.2)$ och $y'(0.2)$ lika med 1 resp 0.2. Beräkna, med steget $h = 0.2$, Eulervärden för $y(0.4)$ och $y'(0.4)$.

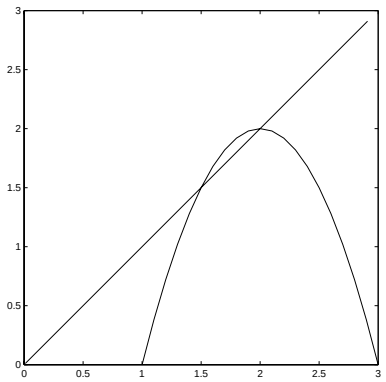
c) (1) Om vi använder Eulers metod, steget $h = 0.01$ för att beräkna $y(2)$ och uppskattar felet i detta värde till 10^{-3}, vad är det rimligt att uppskatta motsvarande fel till för $h = 0.001$.

P6. Ekvationen $2x^2 - 7x + 6 = 0$ har två positiva rötter. Man önskar bestämma dessa rötter med följande fixpunktsiteration:

$$x_{k+1} = 8x_k - 2x_k^2 - 6, \qquad x_0 \quad \textit{givet}$$

a) (2) Man finner att endast den större av de två rötterna går att bestämma med denna metod. Förklara (gärna med hjälp av bifogade figur) varför!

b) (2) Vad menas med kvadratisk konvergens?

c) (3) Visa att konvergensen mot den större roten är kvadratisk för ovanstående iterationsformel.

d) (3) Ange en iterationsformel som kan användas för att bestämma den mindre av rötterna. Motivera hur du kommit fram till formeln!