DN1212 Numeriska metoder och grundläggande programmering FN2 09-02-03

Hedvig Kjellström
hedvig@csc.kth.se

Denna föreläsning

- Kursmål – vilka återstår?
- 45 min information = för långt
- Snabbrepetition (GNM kap 1)
- Felkalkyl (GNM kap 2)
- Ekvationer (GNM kap 3)

Kursmål

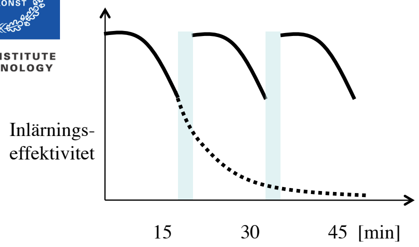
- Mål: Efter genomgången kurs ska studenten kunna
  - identifiera olika matematiska problem och skriva om dem på en form som är lämplig för numerisk behandling
  - välja lämplig numerisk metod för behandling av det givna problemet
  - motivera val av metod genom att redogöra för fördelar och begränsningar
  - välja en algoritm som leder till effektiva beräkningar och implementera den i ett programspråk lämpat för beräkningar t ex Matlab
  - presentera resultaten på ett relevant och illustrativt sätt
  - göra tillförlitlighetsbedömning av resultaten
  - bryta ner större problem i hanterliga delar och skriva egna funktioner för dessa i programspråket
  - använda styr- och datastrukturer
  - hantera filer på olika sätt, både vid inläsning och utskrift
  - använda färdiga funktioner ur programspråkets bibliotek (t ex Matlabs bibliotek) för beräkning, visualisering och effektiv programmering
  - skriva välstrukturerade program i programspråket

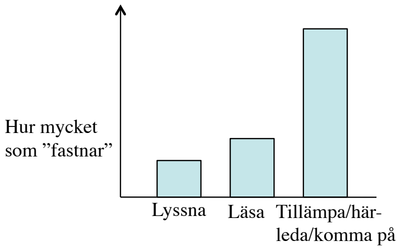
Kursmål

- Mål: Efter genomgången kurs ska studenten kunna
  - identifiera olika matematiska problem och skriva om dem på en form som är lämplig för numerisk behandling
  - ekvationslösning, integrering, derivering, diffekvationer
  - välja lämplig numerisk metod för behandling av det givna problemet
  - motivera val av metod genom att redogöra för fördelar och begränsningar
  - numeriska metoder för ekvationslösning, integrering, derivering, diffekvationer
  - välja en algoritm som leder till effektiva beräkningar och implementera den i ett programspråk lämpat för beräkningar t ex Matlab
  - presentera resultaten på ett relevant och illustrativt sätt
  - göra tillförlitlighetsbedömning av resultaten
  - öva genom labbar (lab 4,5) och projektuppgift med skriftlig rapport (lab 6)

45 min information = för långt

- Gymnasiet: lektioner
  Universitetet: föreläsningar





Bligh, 1972

45 min information = för långt

- Mina föreläsningar har därför aktiviteter insprängda
  - Ni får ombyte/vila
  - Alla aktiva under föreläsningen
- Föreläsningarna täcker bara de mest centrala begreppen
  - Bara ett komplement till boken (GNM)
  - Därför: *Läs i boken!* (helst innan föreläsningen, annars efter)

Att anteckna

- Förr i tiden:
  - inga kursböcker
  - inga OH-bilder
  - anteckningar = "kurslitteratur"
- Ni behöver alltså bara anteckna om det hjälper er att fokusera
  - Vissa lär sig mer när de antecknar
  - Vissa lär sig mindre (tex Hedvig…)
  - Pröva gärna båda sätten!

Snabbrepetition av matematiska begrepp (GNM kap 1)

Vad är numeriska metoder?

- Numerisk metod:
  - En algoritm (följd av regler) som löser ett kontinuerligt matematiskt problem med ett ändligt antal aritmetiska operationer (+, -, *, /)
  - **Approximativ lösning i sifferform**
- Numerisk analys:
  - Konstruktionen av numeriska metoder genom att ersätta matematikens oändliga processer med ändliga processer
  - Analys av metoderna för att bilda sig en uppfattning om hur noggranna de är
  - **Alltid approximationer, måste veta hur stora felen är**

Taylorutveckling

- Polynom är lätta att räkna med
  - tex i lab 1 och 2
- Numerisk analys av "svår" *f(x)* - approximera med polynom
- Taylorutveckling = anpassa ∞-gradspolynom till *f(x)* nära x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^i}{i!} \cdot f^{(i)}(x_0)$$

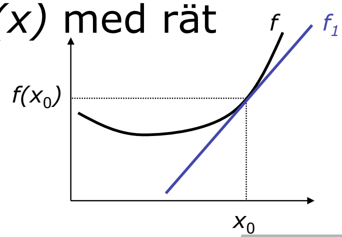
Taylorutveckling

- **Approximation** till *f(x)*: ta bara med de första *n* termerna

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)^i}{i!} \cdot f^{(i)}(x_0)$$

- n = 1: approximera *f(x)* med rät linje omkring x_0

$$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$



Gränsprocesser

- Annat sätt att approximera: ta små steg närmare och närmare lösningen
- Rekursion
  - Approximationer till en följd av storheter beräknas succesivt med en och samma beräkningsprocess
  - Tex, beräkna y_t för t = 1, 2, … från en diffekvation $\frac{dy}{dt} = f(y)$
- Iteration
  - Approximationer till en enda storhet beräknas succesivt med en och samma beräkningsprocess
  - Tex, beräkna lösningen till *f(x)* = 0 med approximationer x_n som kommer allt närmare den verkliga lösningen när *n* ökar
  - Mer iteration nästa timme!

Approximation➔fel

- Var kommer felen ifrån i approximationen?
  - **Modellfel**: fysikalisk/matematisk modell är en förenklad bild av verkligheten
  - **Indatafel**: tex mätfel
  - **Trunkeringsfel**: fel när man avbryter gränsprocesserna
  - **Avrundningsfel:** datorn representerar tal med ett ändligt antal bitar (32 eller 64)

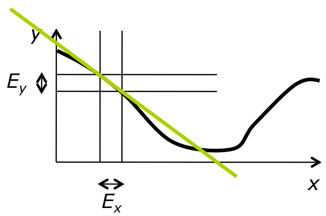
Felkalkyl (GNM kap 2)

Vad är felkalkyl?

- Numeriska beräkningar är aldrig exakta – men hur stort är felet?
- I förväg: vilken noggrannhet vill vi ha?
  - Snabb beräkning = stort fel
  - Långsam beräkning = litet fel
  - Kan välja metod som ger precis "lagom" fel
- I efterhand: hur stort blev felet?
  - Viktigt att veta vilken noggrannhet (hur många gällande siffor) utdata har

Felfortplantning

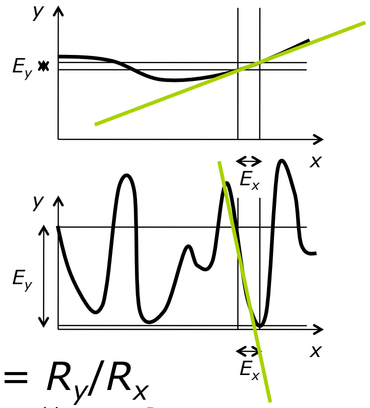
- System $y = f(x)$
  - x indata
  - y utdata



- Felgränser i indata: E_x
  - **Felgräns**: $|x_{uppmätt} - x_{verklig}| \leq E_x$
- Fortplantade felgränser i utdata: $E_y \approx |f'(x)|E_x$
- **Felfortplantningsformeln**

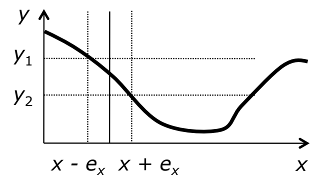
Kondition

- $|f'(x)|$ liten
  - Välkonditionerat system
- $|f'(x)|$ stor
  - Illakonditionerat system
- **Konditionstal** $\kappa = R_y/R_x$
  - **Relativfelgräns**: $|x_{uppmätt} - x_{verklig}|/x_{verklig} \le R_x$



Störningsräkning

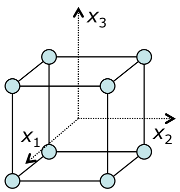
- Vad gör man om man inte vet $|f'(x)|$?
- Störningsräkning
  - Stör indata x genom att lägga till små (kända) fel, och se vad som händer med utdata y
- Om n litet, instängning
  - Gå ett steg e_x bakåt och framåt i alla dimensioner i x
  - Mät $f(x)$ i alla dessa extrempunkter
  - $e_y = |y_2 - y_1|/2$

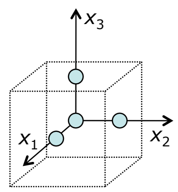


Störningsräkning

- För instängning i ett n-dimensionellt rum krävs 2^n beräkningar
  - varje "hörn"
- Om n stort, störningsräkning med felfortplantningsformeln $E_y \approx |f'(x)|E_x$
  - Stör varje dimension x_i separat med fel e_{xi}
  - uppskatta derivatan mha numerisk derivataskattning

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \approx \frac{f(x + e_{x_i}) - f(x)}{e_{x_i}}$$





Mer om felanalys senare…

- Felanalys centralt!
- Grundregler i numerisk analys:
  - Förenkla problemet (approximera) så att det kan lösas med dator
  - Analysera lösningsmetoden för att se felet i resultatet
  - Ev, välj parametrar i lösningsmetoden för att nå önskad noggrannhet (fel ≈ snabbt, mindre fel ≈ långsammare)

Ekvationer (GNM kap 3)

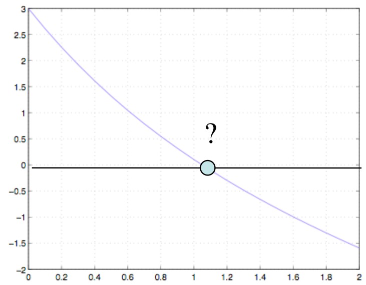
Lösa ekvationer som inte är polynom…

- …kan man oftast inte göra exakt

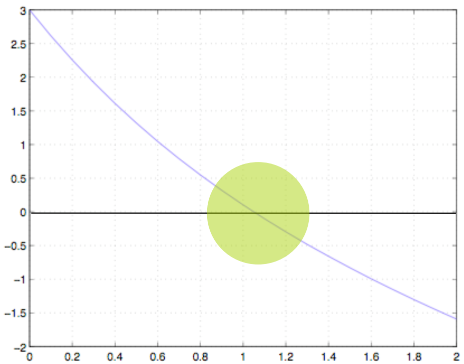
$$3\,e^{-x} = x$$

- samma sak som att hitta nollställen till

$$f(x) = 3\,e^{-x} - x$$



Börja med att plotta funktionen



- Använd sen **iteration**
  - Trunkeringsfel $h_n = |x_n - x_{sann}|$

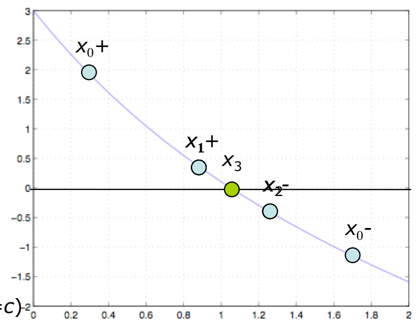
Metod 1: intervallhalvering

- Välj startpunkter x_0+ och x_0- som mellan sig har *en* nollpunkt
- Tills $h_n < \varepsilon$

  $x_n = (x_{n-1}- + x_{n-1}+)/2$

  om $f(x_n)>0$: $x_n+ = x_n$

  om $f(x_n)<0$: $x_n- = x_n$

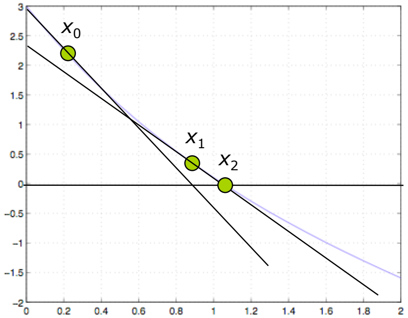


- Ineffektiv men robust:
  - Linjär konvergens ($h_n/h_{n-1}=c$)
  - Trunkeringsfel beräknas som $h_n = |x_0+ - x_0-|/2^n$

Metod 2: Newton-Raphson

- Grundidé: Approximera *f(x)* med rät linje nära x_n, hitta nollpunkt
  - Gissa roten, x_0
  - Rät linje bra approx *nära* x_0
- Tills $h_n < \varepsilon$

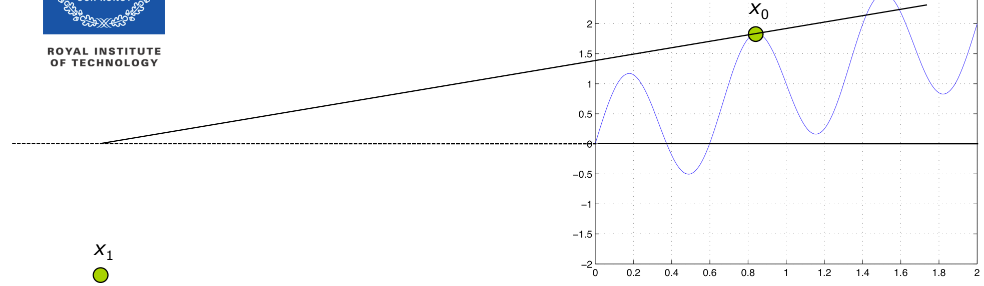
  $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$
- Fungerar inte om $|f'(x)|$ litet
  - …men kvadratisk konvergens ($h_n/h_{n-1}^2 = c$)
  - Trunkeringsfel beräknas som $h_n \leq |x_n - x_{n-1}|$



Metod 2: Newton-Raphson

- Varför inte litet $|f'(x)|$?
- Annan funktion

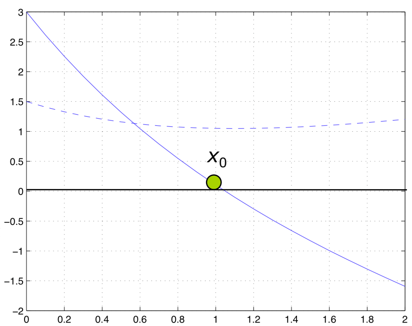
  $$f(x) = 2\sin(3x) - x = 0$$



Metod 3: fixpunktsmetoden

- Grundidé: skriv om *f(x)* = 0 på formen *x* = *g(x)*
  - Gissa roten, x_0
  - Stabil funktion: $g'(x_0) \approx 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3e^{-x} - x = 0 \\ g(x) &= x + c\,f(x) = x \\ g'(x) &= 1 + c\,f'(x) \\ &= 1 - 3c\,e^{-x} - c \\ g'(1) &\approx 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1/2 \end{aligned}$$

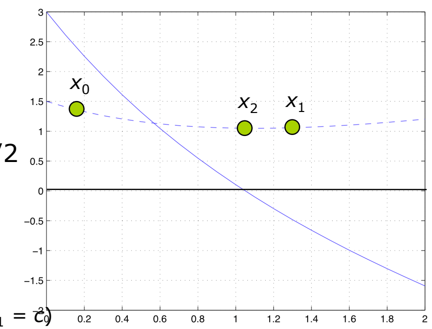


Metod 3: fixpunktsmetoden

- Grundidé: skriv om *f(x)* = 0 på formen *x* = *g(x)*
  - Gissa roten, x_0
- Tills $h_n < \varepsilon$

  $x_n = g(x_{n-1})$

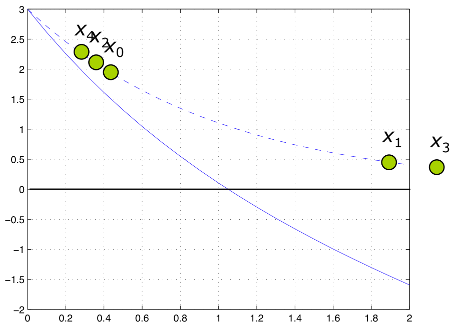
  $= (x_{n-1} + 3\exp(-x_{n-1}))/2$
- Fungerar inte om $|g'(x)| \geq 1$
  - Linjär konvergens ($h_n/h_{n-1} = c$)
  - Trunkeringsfel beräknas som $h_n \leq |x_n - x_{n-1}|$



Metod 3: fixpunktsmetoden

- Varför inte $|g'(x)| \geq 1$?
- Annat val av iterationsfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\,e^{-x} - x = 0 \\ g(x) &= 3\,e^{-x} = x \end{aligned}$$



ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Eget arbete

- Till nästa övning (torsdag):
  - Läs Peter Pohl, Grundkurs i numeriska metoder (GNM) kap 1-3
- Till nästa föreläsning (tisdag):
  - Läs GNM kap 4
  - Ta med GNM
- På hemsidan:
  www.csc.kth.se/DN1212/numpm09, Utdelat i menyn
  - Föreläsningsanteckningar
  - Övningstal
  - Läsanvisning till GNM
  - Labbar

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY