ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

DN1212 Numeriska metoder och grundläggande programmering FN2 09-02-10

Hedvig Kjellström
hedvig@csc.kth.se

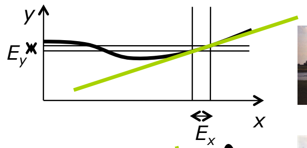
Denna föreläsning

- Repetition av FN2
  - Felkalkyl (GNM kap 2)
  - Olinjära ekvationer (GNM kap 3)
- Linjära ekvationssystem (GNM kap 4.1)
  - Interpolation (polynom, linjär, styckvis)
  - Minsta-kvadratanpassning (överbestämda ekvationssystem)

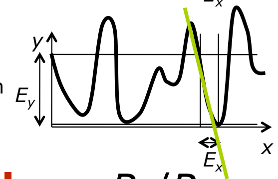
Repetition av FN2 (GNM kap 2, 3)

Felfortplantning och kondition

- **Felfortplantning** $E_y \approx |f'(x)|E_x$
- $|f'(x)|$ liten
  - Välkonditionerat system



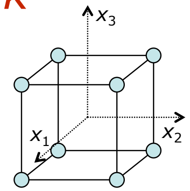
- $|f'(x)|$ stor
  - Illakonditionerat system



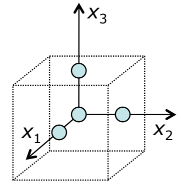
- **Konditionstal** $\kappa = R_y/R_x$
  - **Relativfelgräns**: $|x_{uppmätt} - x_{verklig}|/x_{verklig} \leq R_x$

Störningsräkning för att få κ

- Om n litet, instängning
  - varje "hörn" = varje komb $x_i \pm E_{xi}$



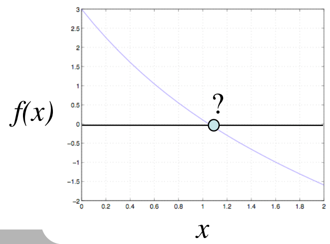
- Om n stort, störningsräkning med felfortplantningsformeln $E_y \approx |f'(x)|E_x$
  - Stör varje dimension x_i separat med fel E_{xi}
  - uppskatta derivatan mha numerisk derivataskattning



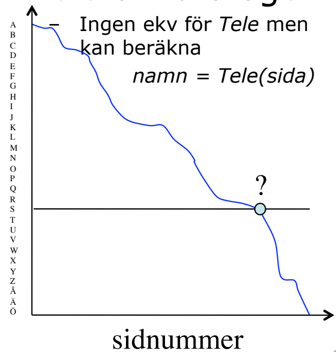
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \approx \frac{f(x+e_{x_i})-f(x)}{e_{x_i}}$$

Olinjära ekvationer

- Lös ekv
  $$3\,e^{-x} = x$$
- Dvs hitta nollställen till
  $$f(x) = 3\,e^{-x} - x$$



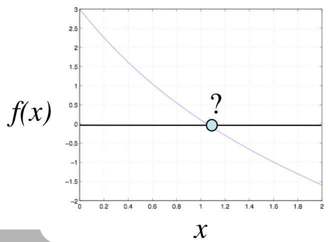
- Hitta sidan med Agda Svensson i telefonkatalogen
  - Ingen ekv för *Tele* men kan beräkna *namn = Tele(sida)*



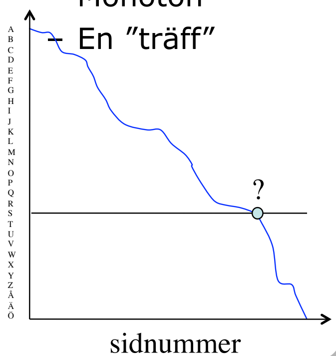
Börja med att undersöka *f(x)*

- Plotta och hitta nollställen grovt
  - Hur många
  - Kurvans form?

$$f(x) = 3\,e^{-x} - x$$



- Denna vet vi hur den ser ut
  - Monoton
  - En "träff"



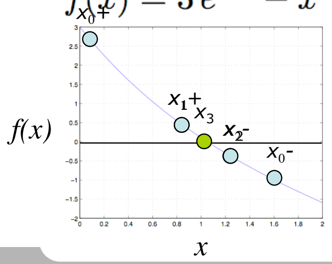
Metod 1: intervallhalvering

- Grundidé:
  - Välj ett intervall där [*ett* nollställe]/[sidan med Agda Svensson] säkert finns
  - Kolla i mitten av intervallet
  - Välj som nytt intervall det delintervall där [nollstället]/[sidan med Agda Svensson] finns
  - Upprepa tills intervallet tillräckligt litet

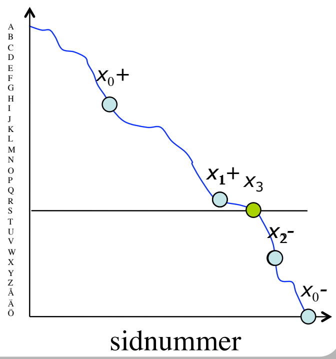
Metod 1: intervallhalvering

- Tills $h_n < \varepsilon$
  $x_n = (x_{n-1}- + x_{n-1}+)/2$
  om $f(x_n)>0$: $x_n+ = x_n$
  om $f(x_n)<0$: $x_n- = x_n$

$$f(x) = 3\,e^{-x} - x$$

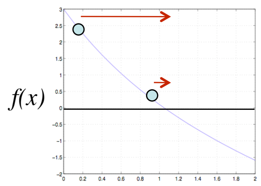


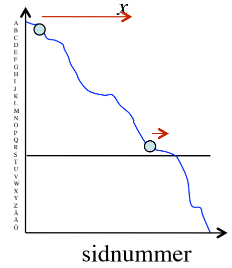
- Ineffektiv men robust:
  - Linjär konvergens ($h_n/h_{n-1}=C$)



Metod 2: fixpunktsiteration

- Grundidé:
  - Intervallhalvering bra om *f* brusig …men
  - Om *f* monoton nära 0 kan man göra bättre!
  - Tex, är man på B kan man bläddra fler sidor i taget om man letar efter Agda Svensson än om man är på R
  - $f(x)$ ~ avstånd till nollstället
  - Välj en startpunkt
  - Gå mot $f(x) = 0$ med steg $c\,f(x)$: $x = x + c\,f(x)$
  - *c* konstant – välj smart!



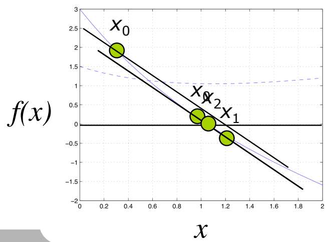


Metod 2: fixpunktsiteration

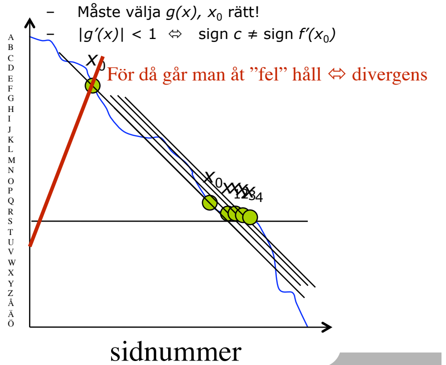
- Gissa x_0, def $g(x)$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = x + c\,f(x) = x$$
$$g'(x_0) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad c \approx -1/f'(x_0)$$

- Tills $h_n < \varepsilon$
  $x_n = g(x_{n-1})$

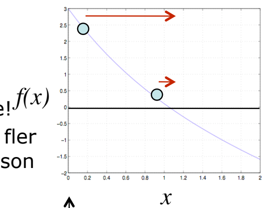


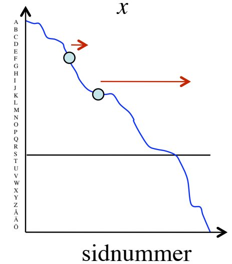
- Lite snabbare, inte lika robust
  - Linjär konvergens ($h_n/h_{n-1}=C$)
  - Måste välja $g(x)$, x_0 rätt!
  - $|g'(x)| < 1$ ⇔ sign $c \neq$ sign $f'(x_0)$



Metod 3: Newton-Raphson

- Grundidé:
  - Fixpunktsiteration bra om *f′* konstant …men
  - Genom att variera steg kan man göra bättre!
  - Tex, är man på Johansson kan man bläddra fler sidor i taget om man letar efter Agda Svensson än om man är på Franzén
  - $f(x)/f'(x)$ ~ avstånd till nollstället
  - Välj en startpunkt
  - Gå mot $f(x) = 0$ med steg $f(x)/f'(x)$: $x = x - f(x)/f'(x)$
  - NR är en sorts fixpunktsiteration med lokalt varierande $c = -1/f'(x)$



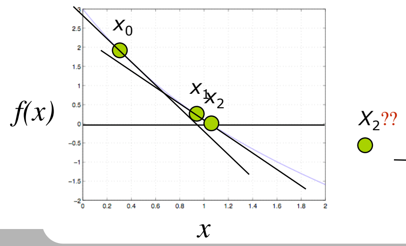


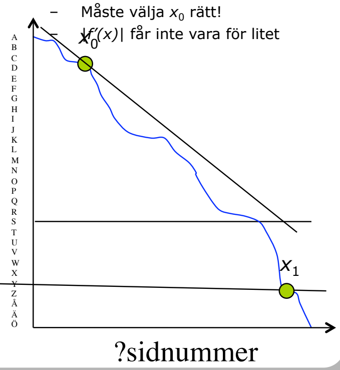
Metod 3: Newton-Raphson

- Gissa x_0, gå gång på gång i tangentens riktning
- Tills $h_n < \varepsilon$

$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$

- Mycket snabbare, men mindre robust
  - Kvadratisk konvergens ($h_n/h_{n-1}^2 = C$)
  - Måste välja x_0 rätt!
  - $|f'(x)|$ får inte vara för litet





Linjära ekvationssystem (GNM kap 4.1)

Linjära ekvationssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- Givet: **A** och **b**
- Mål: att bestämma **x**
- Gausseliminering (för hand eller med dator: `x = A\b`)
- Lösbart om det(**A**) ≠ 0
  - **A** ickesingulär

Linjära ekvationssystem

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 10];
>> b = [-3 -3 -5]';
>> x = A\b
x =
     1
     1
    -2
>> A(3,3) = 9;
>> x = A\b
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.541976e-18.
x =
   1.0e+16 *
    0.9007
   -1.8014
    0.9007
```

Linjära ekvationssystem

- Viktigt att uppskatta **tidsåtgång**
- ~ antalet operationer (+ - * /)
- För gausselimination ~$2n^3/3$ där n antal obekanta
  - För 1 obekant: tid = konstant*2/3 (tex 1 s)
  - För 10 obekanta: tid = konstant*2000/3 (tex 17 min)
  - För 100 obekanta: tid = konstant*2000000/3 (tex 12 dagar)
- Mycket hög tillväxttakt!
  - Stora system utnyttjar att många element = 0 (**A** gles)
  - Återkommer till det i FN7

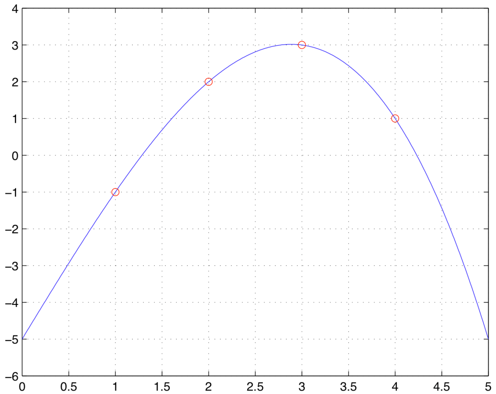
Interpolation

- Anpassa kurvor till givna punkter
- **Polynominterpolation**
  - Tillämpning av linjära ekvationssystem
  - n punkter (xi, yi), alla xi olika => precis *ett* polynom av grad n – 1 genom punkterna, $p(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n$
- Lab 2, när polynomgrad = n - 1

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{y}\ , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

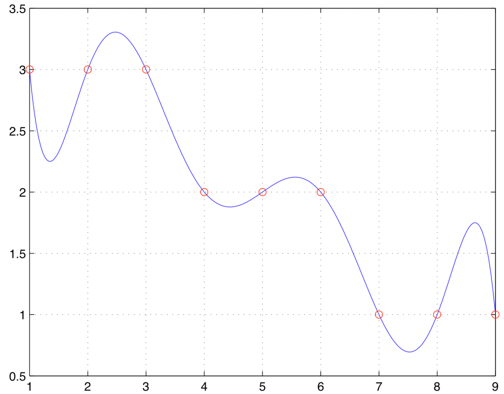
Polynominterpolation

- Här: bra



Polynominterpolation

- Här: mindre bra



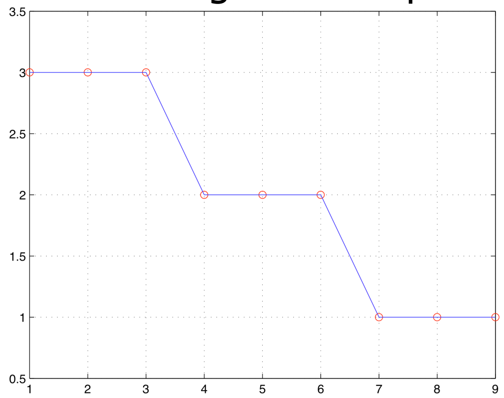
  - Oscillationer mellan mätpunkterna: **Runges fenomen**

Styckvis interpolation

- Hittills använt *samma* polynom genom alla punkter
  - Fler än ca 10 punkter ⇔ Runges fenomen
- Istället, *olika* polynom mellan olika punkter
  - Styckvis linjär interpolation
  - Styckvis kubisk interpolation (splines)

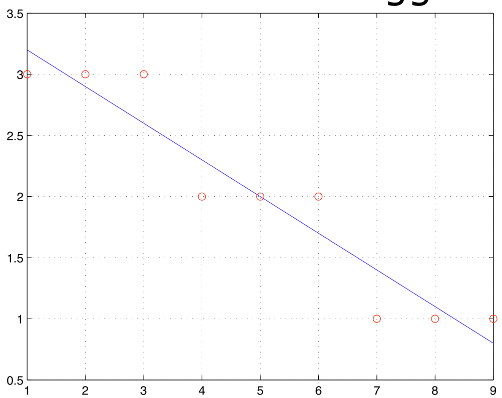
Styckvis interpolation

- Bättre tolkning av de 9 punkterna



Överbestämda linjära ekvationssystem

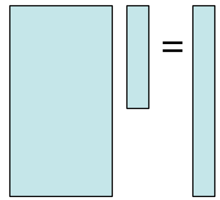
- Men om vi vet bakomliggande modell?



  - **Approximera** mätdata med bakomliggade modell (här linje)

Överbestämda linjära ekvationssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$$



- Lös i **minstakvadratmening** genom att välja **x** som minimerar $(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^2$
- Lab 2, när polynomgrad < *n* - 1

Anpassa rät linje till *n*>2 mätdata

$$p(x) = c_1 + c_2 x \qquad (x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$$

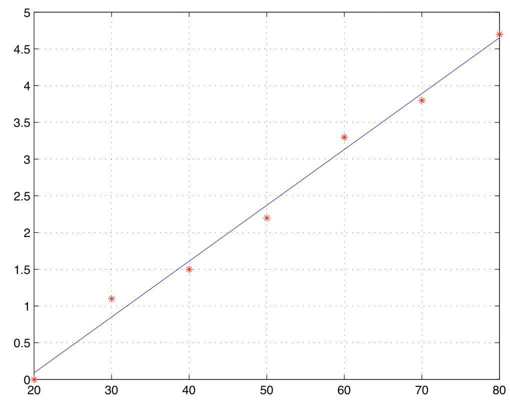
- Minimera $Q(c_1, c_2) = \sum_{i=1}^{n} (c_1 + c_2 x_i - y_i)^2$
- Derivatan = 0

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial c_1}(c_1, c_2) = 2\sum_{i=1}^{n}(c_1 + c_2 x_i - y_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial c_2}(c_1, c_2) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(c_1 + c_2 x_i - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 n + c_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + c_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

- **Normalekvationerna**
  - Ej överbestämt ekvationssystem – kan lösas med gausselim.

Anpassa rät linje till *n*>2 mätdata



Anpassa p-polynom till n>p+1 mätdata

$$(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$$

$$p(x) = c_1 x^p + c_2 x^{p-1} + \cdots + c_{p+1}$$

- Minimera $(\mathbf{Ac} - \mathbf{y})^2$ $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^p & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^p & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- Normalekvationerna på matrisform: $\mathbf{A}^T\mathbf{Ac} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$
  - Ej överbestämt ekvationssystem – kan lösas med gausselim.
  - Härledning i GNM kap 4:1D

Hjälpmedel i Matlab

- Behöver inte implementera normalekvationerna
- Lösning av linjära ekvationssystem: \
  - Både gausseliminering och minstakvadratanpassning
- Polynomanpassning: `polyfit, polyval`
  - Både interpolation och approximation

Felanalys för ekvationssystem

- Som alltid – måste hålla reda på hur stora fel vi gör!
- Förra föreläsningen: konditionstal $\kappa = R_y/R_x$
- Kan bestämma konditionstal för systemmatrisen **A** också
- Mer om detta i FN8

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Eget arbete

- Till nästa övning (onsdag):
  - Läs GNM kap 4.1
- Till nästa föreläsning (tisdag):
  - Läs GNM kap 5
  - Ta med GNM
- På hemsidan:
  www.csc.kth.se/DN1212/numpm09, Utdelat i menyn
  - Föreläsningsanteckningar
  - Övningstal
  - Läsanvisning till GNM
  - Labbar

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY