DN1212 Numeriska metoder och grundläggande programmering FN4 09-02-17

Hedvig Kjellström
hedvig@csc.kth.se

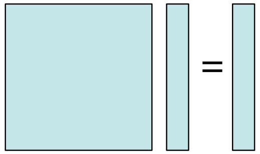
Denna föreläsning

- Repetition av FN3 (GNM kap 4.1)
  - Interpolation
  - Minsta-kvadratanpassning
- Diagnostiskt prov på FN2,3
- Numerisk derivering (GNM kap 1.3C)
  - Framåt-, bakåt, centraldifferens
- Numerisk integrering (GNM kap 5)
  - Trapetsregeln
  - Trapetsregeln med feltermskorrektion
  - Adaptiva metoder

Repetition av FN3 (GNM kap 4.1)

Linjära ekvationssystem

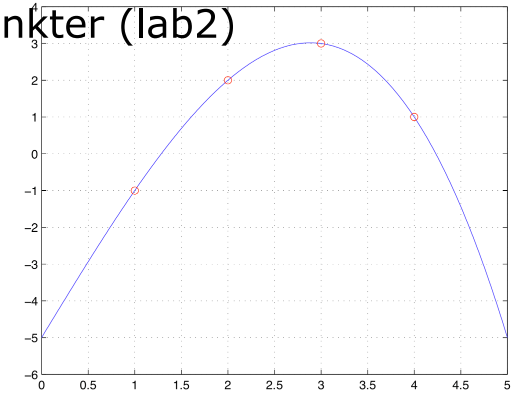
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$



- Givet: **A** och **b**
- Mål: att bestämma **x**
- Gausseliminering (för hand eller med dator: `x = A\b`)
- Lösbart om det(**A**) ≠ 0
  - **A** ickesingulär

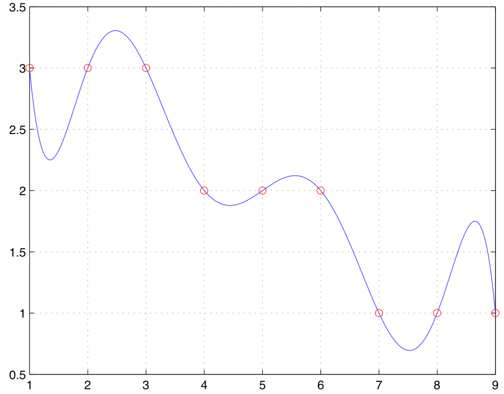
Vanligaste tillämpning av linjära ekvationssystem

- Polynominterpolation mellan punkter (lab2)



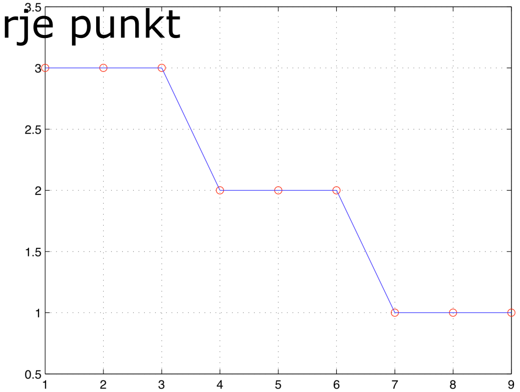
Polynominterpolation inte bra om n stort

- Runges fenomen



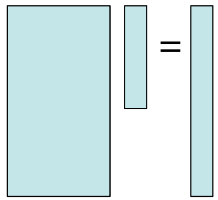
Då kan man använda styckvis (linjär) interpolation

- Rät linje (1-gradspolynom) mellan varje punkt



Överbestämda linjära ekvationssystem

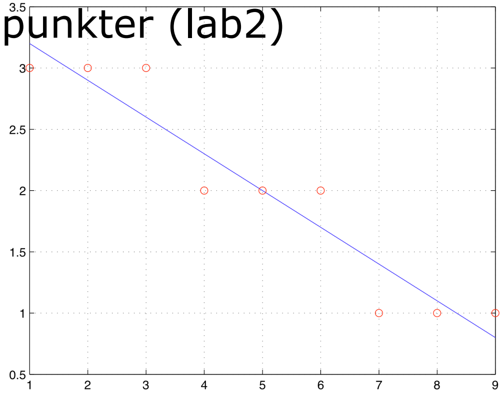
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$$



- Lös i **minstakvadratmening** genom att välja **x** som minimerar $(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^2$
- Lab 2, när polynomgrad < *n* - 1

Vanligaste tillämpning av överbestämda ekvationssystem

- Minstakvadratanpassning av polynom till punkter (lab2)



Minstakvadratanpassning av polynom till punkter

$$(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$$

$$p(x) = c_1 x^p + c_2 x^{p-1} + \cdots + c_{p+1}$$

- Minimera $(\mathbf{Ac} - \mathbf{y})^2$ $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^p & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^p & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

- Normalekvationerna på matrisform: $\mathbf{A}^T\mathbf{Ac} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$

Hjälpmedel i Matlab

- Behöver inte implementera normalekvationerna
- Lösning av linjära ekvationssystem: `\`
  - Både gausseliminering och minstakvadratanpassning
- Polynomanpassning: `polyfit, polyval`
  - Både interpolation och approximation

Numerisk derivering (GNM kap 1.3C)

Framåtdifferenskvot

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + ch$$

- Härled mha Taylorutveckling

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

$$hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \frac{f''(x)}{2}h^2 + (\text{termer} \ll h^2)$$

Bakåtdifferenskvot

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + ch$$

- Härled mha Taylorutveckling

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \dots$$

$$hf'(x) = f(x) - f(x-h) + \frac{f''(x)}{2}h^2 - (\text{termer} \ll h^2)$$

Noggrannhetsordning *p*

- Rep från FN2: Konvergens-ordning *p* för iteration
  - Trunkeringsfel $h_n = ch_{n-1}^p$
  - "Hur fort minskar felet med antal iterationer?"
- Noggrannhetsordning *p* för derivering, integrering, diffekv
  - Trunkeringsfel

$$e(h) = c_1h^p + c_2h^q + c_3h^r + \dots$$

$$p < q < r < \dots$$

  - "Hur fort minskar felet när man minskar steglängden?"

Noggrannhetsordning *p*

- Framåtdifferens

$$e(h) = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ch$$

$$\Rightarrow p = 1$$

- Bakåtdifferens

$$e(h) = f'(x) - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = ch$$

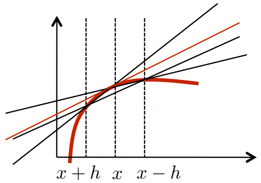
$$\Rightarrow p = 1$$

Centraldifferens

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + ch^2$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + ch^2$$

- Högre noggrannhetsordning, *p*=2
- Går också att härleda mha Taylorutveckling
- Men också intuitivt
  - Bättre än både framåt- och bakåtdifferens
  - Överensstämmer med noggrannhetsordning



Numerisk integrering
(GNM kap 5)

Integrering över slutet intervall

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Numeriska metoder för integrering
- Förbehandling för numerisk integrering

Newton-Cotes formler

- Ersätter *f(x)* med *n*-polynom

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx$$

  - Lätt att integrera ett polynom
  - Polynomanpassning lärde vi oss i FN3
  - I praktiken gör man inte detta explicit, utan…
- Ersätter integralen med summa

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)\ ,\ \ x_i = hi + a$$

  - w_i är vikter
  - Se http://en.wikipedia.org/wiki/Newton-Cotes_formulas för en härledning

Trapetsregeln

- Vanligt specialfall av Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)\ ,\ x_i = hi + a$$

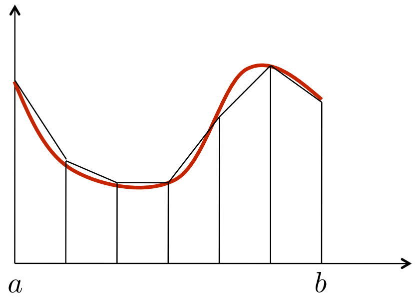
$$w_0 = \frac{h}{2}$$

$$w_i = h \quad ,0 < i < n$$

$$w_n = \frac{h}{2}$$

  - "Summa av areor av trapetser"

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx h\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$



Trapetsregelns noggrannhetsordning *p*

$$T(h) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

- Trunkeringsfel

$$e(h) = T(h) - \int_a^b f(x)\,dx = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \ldots \approx ch^2$$

- …dvs noggrannhetsordning *p*=2

Richardsonextrapolation

- Idé: uppskatta c^{pred} genom att variera *h* och mäta felet *e(h)* för trapetsmetoden
- Tex beräkna *e(2h)* och *e(h)*

$$e(2h) = T(2h) - \int_a^b f(x)\,dx \approx c^{\text{pred}}(2h)^2 = 4c^{\text{pred}}h^2$$

$$e(h) = T(h) - \int_a^b f(x)\,dx \approx c^{\text{pred}}h^2$$

$$\Rightarrow T(h) - T(2h) \approx -3c^{\text{pred}}h^2$$

$$T^{\text{pred}}(h) = T(h) - c^{\text{pred}}h^2 = T(h) + \frac{T(h)-T(2h)}{3}$$

Trapetsregeln med Richardsonextrapolation = Simpsons formel

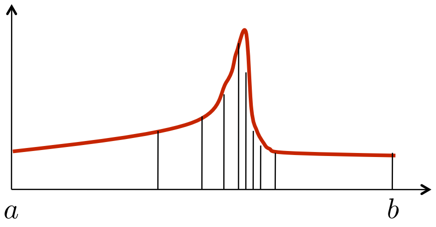
- Kalla T^{pred} för *S*

$$S(h) = T(h) - c^{\text{pred}}h^2 = T(h) + \frac{T(h)-T(2h)}{3} = \cdots =$$

$$= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

Adaptiva metoder

- Trapetsmetoden och Simpson har konstant steg *h*
- Men om *f(x)* ser ut såhär?



- Matlabmetoderna `quad` och `quadl`

Förberedande åtgärder (numeriska)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Dela upp integranden *f(x)*
  - Kan någon term lösas analytiskt?

$$f(x) = 0.5 + e^{-(10x+134)^2}$$

  - Integrering över övriga termer bättre konditionerad!
- Dela upp intervallet [*a*,*b*]
  - Är någon term mycket liten på någon del av intervallet?

$$\int_{-15}^{15} 0.5 + e^{-(10x+134)^2}\,dx \approx \int_{-15}^{-10} 0.5 + e^{-(10x+134)^2}\,dx + \int_{-10}^{15} 0.5\,dx$$

Förberedande åtgärder (numeriska)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Kapa intervallet [*a*,*b*]
  - Är *f(x)* mycket liten på någon del av intervallet?

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx \approx \int_0^{25} e^{-x}\,dx$$

Förberedande åtgärder (analytiska)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Substituera *x* = *g(t)*
  - Förenklar på samma sätt som när man räknar med papper och penna

$$\int_0^{0.5} \frac{x^{0.34}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \{x = \sin t\} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^{0.34} t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\,dt =$$

$$= \left\{\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{0.34} t\,dt$$

Förberedande åtgärder (analytiska)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Partiell integrering
  - Förenklar på samma sätt som när man räknar med papper och penna

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx = \{f(x \to 0) \to \infty\} =$$

$$= 2\sqrt{x}e^{-x^2}\Big|_0^1 + 4\int_0^1 x\sqrt{x}e^{-x^2}\,dx =$$

$$= 2e^{-1} + 4\int_0^1 x\sqrt{x}e^{-x^2}\,dx$$

Eget arbete

- Till nästa övning (onsdag):
  - Läs GNM kap 1.3C, 5
- Till nästa föreläsning (nästa torsdag):
  - Läs GNM kap 6.1-6.2
  - Ta med GNM
- På hemsidan:
  www.csc.kth.se/DN1212/numpm09, Utdelat i menyn
  - Föreläsningsanteckningar
  - Övningstal
  - Läsanvisning till GNM
  - Labbar