DN1212 Numeriska metoder och grundläggande programmering FN4 09-02-26

Hedvig Kjellström
hedvig@csc.kth.se

Denna föreläsning

- Repetition av FN4 (GNM kap 1.3C, 5)
  - Numerisk derivering
  - Numerisk integrering
- Differentialekvationer (GNM kap 6.1)
  - Lösningar
  - Standardform för begynnelsevärdesproblem
  - Visualisera mha riktningsfält
- Begynnelsev.problem (GNM kap 6.2)
  - Stegmetoder (Finita differensmetoder)
  - Enstegsmetoder: Eulers metoder
  - Stabilitet och instabilitet

Repetition av FN4 (GNM kap 1.3C, 5)

Noggrannhetsordning *p*

- Rep från FN2: Konvergensordning *p* för iteration
  - Trunkeringsfel $h_n = ch_{n-1}^p$
  - ”Hur fort minskar felet *h* med antal iterationer *n*?”
- Noggrannhetsordning *p* för derivering, integrering, diffekv
  - Trunkeringsfel

$$e(h) = c_1 h^p + c_2 h^q + c_3 h^r + \ldots$$

$$p < q < r < \ldots$$

  - ”Hur fort minskar felet *e(h)* när man minskar steglängden *h*?”

Numerisk derivering

- Framåtdifferenskvot

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + ch$$

- Bakåtdifferenskvot

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + ch$$

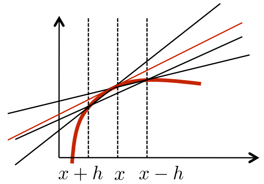
- Båda har noggrannhetsordning *p*=1

Numerisk derivering

- Centraldifferenskvot

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + ch^2$$

- Högre noggrannhetsordning *p*=2
- Kan förstå detta intuitivt
  - Bättre än både framåt- och bakåtdifferens



Numerisk integrering

- Integrering över slutet intervall

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

  - Inte alltid möjligt att integrera *f(x)* analytiskt
- Newton-Cotes formler

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)\ ,\ x_i = hi + a$$

  - Ersätter integralen med summa
  - w_i är vikter

Trapetsregeln

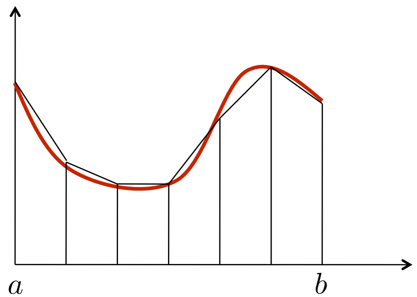
- Vanligt specialfall av Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)\ ,\ x_i = hi + a$$

$$w_0 = \frac{h}{2}$$
$$w_i = h \quad ,0 < i < n$$
$$w_n = \frac{h}{2}$$

  - ”Summa av areor av trapetser”

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx h\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$



- Noggrannhetsordning *p*=2

Richardsonextrapolation

- p=2 ger felterm $e(h) \approx ch^2$
- Idé: Uppskatta $c = c^{\text{pred}}$

$$T^{\text{pred}}(h) = T(h) - c^{\text{pred}} h^2$$

- Beräkna $e(2h)$ och $e(h)$

$$e(2h) = T(2h) - \int_a^b f(x)\,dx \approx c^{\text{pred}}(2h)^2 = 4c^{\text{pred}} h^2$$

$$e(h) = T(h) - \int_a^b f(x)\,dx \approx c^{\text{pred}} h^2$$

$$\Rightarrow T(h) - T(2h) \approx -3c^{\text{pred}} h^2$$

$$T^{\text{pred}}(h) = T(h) - c^{\text{pred}} h^2 = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{3}$$

Trapetsregeln med Richardsonextrapolation = Simpsons formel

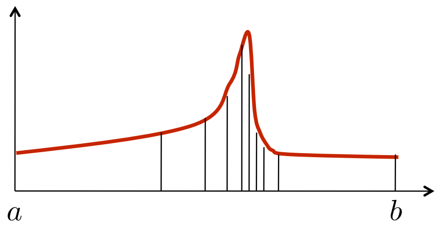
- Kalla T^{pred} för S

$$S(h) = T(h) - c^{\text{pred}} h^2 = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{3} = \cdots =$$

$$= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

Adaptiva metoder

- Trapetsmetoden och Simpson har konstant steg h
- Men om $f(x)$ ser ut såhär?



- Matlabmetoderna `quad` och `quadl`

Förberedande åtgärder

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Dela upp integranden $f(x)$
- Dela upp intervallet [a,b]
- Kapa intervallet [a,b]
- Substituera $x = g(t)$
- Partiell integrering

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Differentialekvationer (GNM kap 6.1)

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Differentialekvationer

- Viktigt verktyg för att beskriva naturvetenskapliga, tekniska processer
- Uppdelning 1:
  - Ordinär differentialekvation (ODE)
    $$\frac{du}{dt} = sin(t) - 2u, u(0) = 0$$
  - Partiell differentialekvation (PDE) (vågekvationen i 1 dim)
    $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
  - Vi studerar bara ODE i denna kurs

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Differentialekvationer

- Idag koncentrerar vi oss på **begynnelsevärdesproblem**
- Uppdelning 2:
  - Linjär ODE (kan lösas analytiskt)
    $$\frac{du}{dt} = sin(t) - 2u, u(0) = 0$$
  - Ickelinjär ODE (kan oftast inte lösas analytiskt)
    $$\frac{du}{dt} = -u^2 + t^2, u(1) = 1$$
  - Vi ska studera numerisk lösning av ickelinjära ODE

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Differentialekvationer

- Uppdelning 3:
  - Första ordningens ODE
    $$\frac{du}{dt} = sin(t) - 2u, u(0) = 0$$
  - Högre ordningens ODE
    $$m\frac{d^2 u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = Asin(\omega t), u(0) = 0, \frac{du}{dt}(0) = 0$$
- I fortsättningen:
  $$\frac{d}{dt} \equiv \dot{}, \frac{d^2}{dt^2} \equiv \ddot{}, \frac{d}{dx} \equiv {}', \frac{d^2}{dx^2} \equiv {}'', \frac{d^n}{dx^n} \equiv {}^{(n)},$$

Lösningar

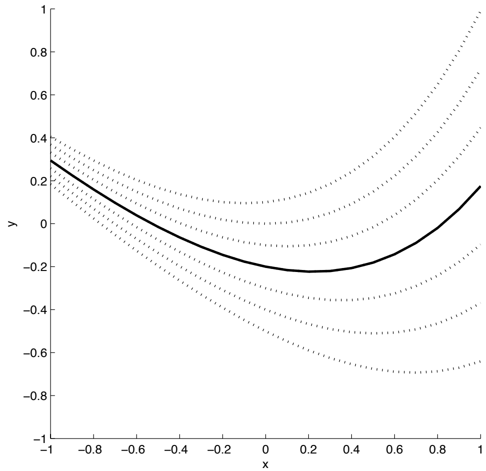
- Lösning – en funktion
- ODE $y' = -xy$
- …har lösningen $y = Ae^{-x^2/2}$

- **Lösningsskara**
- Begynnelsevillkor definierar lösning ur skaran:

$$y(0) = 1 \Rightarrow A = 1$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

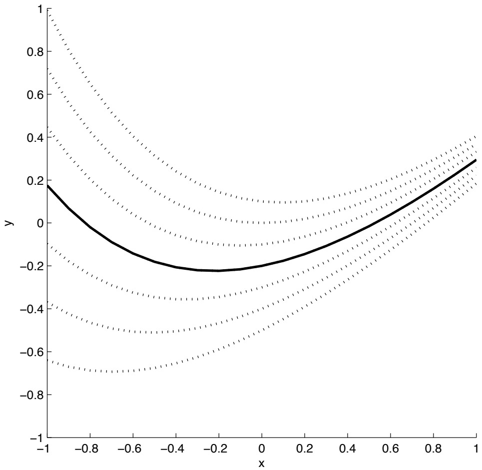
Lösningsskara



$$y' = x + y$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Lösningsskara



$$y' = x - y$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Standardform för begynnelsevärdesproblem

- Första ordningens ODE med begynnelsevillkor

$$y' = f(x, y), y(a) = c$$

- Eller system av ODE

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z, \ldots), y(a) = c \\ z' = g(x, y, z, \ldots), z(a) = d \\ \ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \mathbf{u}(a) = \mathbf{c}$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Skriva om högre ordningens ODE på standardform

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$
$$y(a) = c_1, y^{(i-1)}(a) = c_i, i = 1, \dots, n$$

- Inför *n* hjälpfunktioner

$$u_1(x) = y(x), u_i(x) = y^{(i-1)}(x), i = 1, \dots, n$$

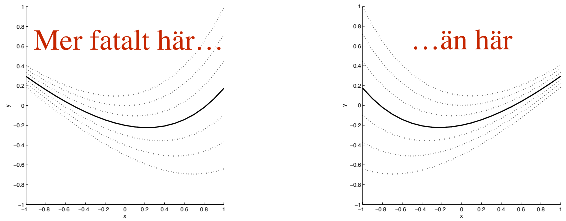
- System av första ordningens ODE

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \dots \\ u_{n-1}' = u_n \\ u_n' = g(x, u_1, \dots, u_n) \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \mathbf{u}(a) = \mathbf{c}$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Olinjära ODE

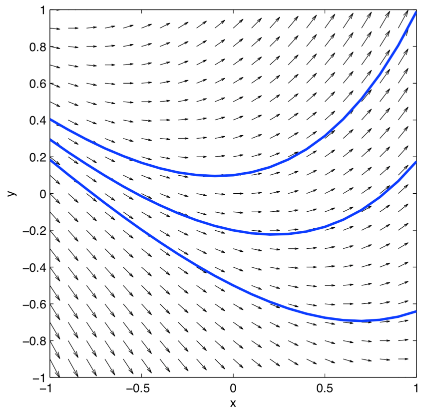
- Kan lösas numeriskt
  - Skrivs om på standardform $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \mathbf{u}(a) = \mathbf{c}$
- Approximativt (som alltid)
- Approx: hoppar mellan funktioner i lösningsskaran



ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Riktningsfält

- Grafisk teknik för att bilda sig en uppfattning om lösningsskaran

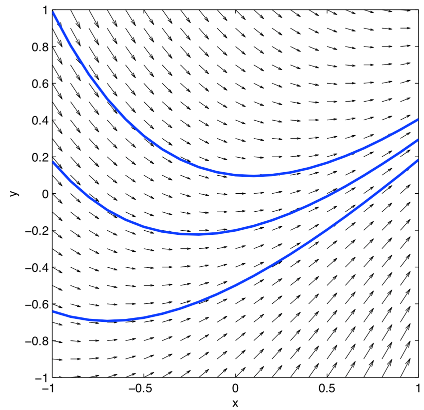


$$y' = x + y$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Riktningsfält

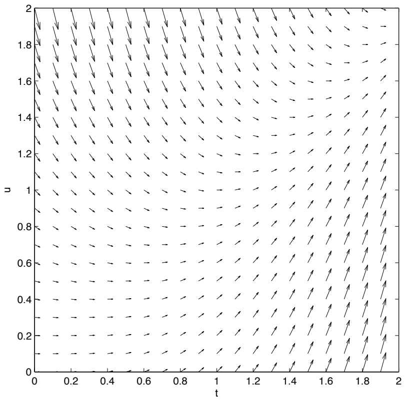
- Ger bild av systemets **kondition** ≈ fel i slutet / fel i början



$$y' = x - y$$

Riktningsfält

– Vad kan man utläsa om detta systems kondition?



$$\dot{u} = -u^2 + t^2$$

```
% Matlabkod
[tkoord, ukoord] = ...
  meshgrid(0:0.1:2, 0:0.1:2);
pilt = ones(size(tkoord));
pilu = -ykoord.^2 + ...
        tkoord.^2;
quiver(tkoord, ukoord, ...
       pilt, pilu, 'k')
xlabel('t')
ylabel('u')
axis equal
axis tight
axis([0 2 0 2])
```


Numeriska metoder för begynnelsevärdesproblem (GNM kap 6.2)

Stegmetoder (finita differensmetoder)

- Skriv om ekv på standardform

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \mathbf{u}(a) = \mathbf{c}$$

- Starta i begynnelsepunkten
- Ta små steg i derivatans riktning

- Trunkeringsfel = hopp mellan kurvor i lösningsskaran
  - **Lokalt trunkeringsfel** = felet vid ett steg
  - **Globalt trunkeringsfel** = det ackumulerade lokala felet
  - Mer om kondition, indatafel, trunkeringsfel och stabilitet i FN6

Euler framåt (Explicit Euler)

- Enklaste stegmetoden

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), & y_0 = c \\ x_{i+1} = x_i + h, & x_0 = a \end{cases}$$

- Används för
  - Grova uppskattningar
  - Förståelse
  - ...men inte för att lösa diffekv noggrant

```
x = a;
u = c;
while x < b
  u = [u, u(end) + h*f(x(end), u(end))];
  x = [x, x + h];
end
```

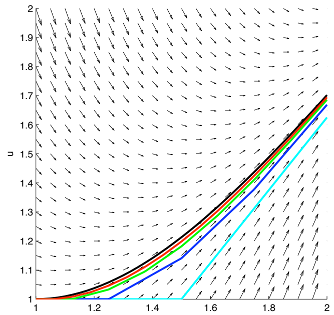
- Noggrannhetsordning $p = 1$

Euler framåt (Explicit Euler)

- Matlabexempel

$\dot{u} = -u^2 + t^2, u(1) = 1$

- Plot:



- Utskrift:

```
    h         E_h        E_h/E_2h
0.5000  7.689e-02  7.689e-02
0.2500  3.303e-02  4.295e-01
0.1250  1.589e-02  4.812e-01
0.0625  7.788e-03  4.901e-01
Linjärt avtagande trunkeringsfel - noggrannhetsordning p = 1
```

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Euler bakåt (Implicit Euler)

- Problem med Euler framåt : **instabil** (mer i FN6)
- Formulera istället steg som

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}), & y_0 = c \\ x_{i+1} = x_i + h, & x_0 = a \end{cases}$$

- Måste skriva om ekv (1) som

$$\begin{cases} y_{i+1} = g(x_i, y_i, h), & y_0 = c \\ x_{i+1} = x_i + h, & x_0 = a \end{cases}$$

- Noggrannhetsordning p = 1

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

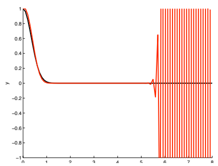
Euler bakåt (Implicit Euler)

- Matlabexempel

$y' = -8xy, y(0) = 1$, lösn $y = e^{-4x^2}$

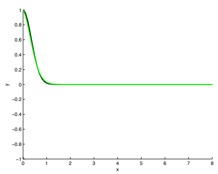
- Euler framåt

```
x = 0; y = 1; h = 0.1;
while x < 8
  y = y + h*(-8*x*y);
  x = x + h;
end
```



- Euler bakåt

```
x = 0; y = 1; h = 0.1;
while x < 8
  y = y/(1 + 8*h*(x + h);
  x = x + h;
end
```



ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Stabilitet

- Heuristiskt: det är stabilare att styra "framifrån" (Euler bakåt) än "bakifrån" (Euler framåt)

- Formellt: På nästa föreläsning

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Eget arbete

- Till nästa övning (fredag):
  - Läs GNM kap 6.1-6.2C
- Till nästa föreläsning (17/3):
  - Läs GNM kap 6.2D-G
  - Ta med GNM
- På hemsidan:
  www.csc.kth.se/DN1212/numpm09, Utdelat i menyn
  - Föreläsningsanteckningar
  - Övningstal
  - Läsanvisning till GNM
  - Labbar