DN1212 Numeriska metoder och grundläggande programmering
FN7 09-03-23

Hedvig Kjellström
hedvig@csc.kth.se

Denna föreläsning

- Repetition av FN6 (GNM kap 6.1G-2G)
  - Runge-Kuttas metoder – ökad noggrannhet
  - Trapetsmetoden – ökad stabilitet
  - Flerstegsmetoder
  - Adaptiva metoder
- Linjära randvärdesproblem (GNM kap 4.1B-C, 6.3A,C)
  - Stora linjära ekvationssystem
  - Bandmatrismetoden/Finita differensmetoden
- Ickelinjära randvärdesproblem (GNM kap 4.2, 6.3A,C)
  - Newton-Raphson för ickelinjära ekvationssystem
  - Bandmatrismetoden/Finita differensmetoden

Repetition av FN6 (GNM kap 6.1G-2G)

Runge-Kuttas metoder

- Eulers metoder, noggrannhets-ordning $p = 1$
- Specialfall (1:a ordn) av R-K
- Nästa specialfall (2:a ordn) är **Heuns metod**

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$
$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + k_2)/2$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

- Noggrannhetsordning $p = 2$

Runge-Kuttas metoder

- R-K av 4:e ordn är det som kallas **Runge-Kuttas metod**

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$
$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

- Noggrannhetsordning $p = 4$

Trapetsmetoden

- ”Medelvärde” mellan Euler framåt och Euler bakåt

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1} + y_{i+1})), & y_0 = c \\ x_{i+1} = x_i + h, & x_0 = a \end{cases}$$

- Implicit, kräver att första ekv stuvas om

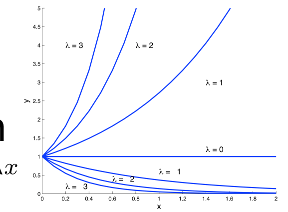
$$\begin{cases} y_{i+1} = g(x_i, y_i, h), & y_0 = c \\ x_{i+1} = x_i + h, & x_0 = a \end{cases}$$

- Noggrannhetsordning $p = 2$

Stabilitet

- Det är bättre att använda en implicit metod (Trapetsmetoden) om det är risk för **instabilitet**
- Betrakta testekvationen

$$y' = \lambda \cdot y, y(0) = 1, \text{ lösning } y = e^{\lambda x}$$



- Stegmetod med steglängd h
  - **Stabil** om $|y_{i+1}| \leq |y_i|$
  - **Instabil** om $|y_{i+1}| > |y_i|$ eller **svagt stabil** om

$$|y_{i+1}| > |y_i|, \ \mathrm{sign}(y_{i+1}) \neq \mathrm{sign}(y_i)$$

Stabilitet

- Euler framåt

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda \cdot y_i = y_i \cdot (1 + h\lambda)$$

  - Dvs stabil om $|1 + h\lambda| \leq 1$ dvs $-2 \leq h\lambda \leq 0$

- Euler bakåt

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda \cdot y_{i+1}$$
$$y_{i+1} - h\lambda \cdot y_{i+1} = y_i$$
$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - h\lambda}$$

  - Dvs stabil om $\frac{1}{|1 - h\lambda|} \leq 1$ dvs $h\lambda \leq 0 \text{ eller } h\lambda \geq 2$

Mycket större område! …men ett problem att lösning *avtagande* för stora positiva λ.

Stabilitet

- Trapetsmetoden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\lambda \cdot y_i + \lambda \cdot y_{i+1})$$

$$y_{i+1} - \frac{h}{2}\lambda \cdot y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\lambda \cdot y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{1+\frac{h}{2}\lambda}{1-\frac{h}{2}\lambda} \cdot y_i$$

  - Dvs stabil om $\frac{1+\frac{h}{2}\lambda}{1-\frac{h}{2}\lambda} \le 1$ dvs $\lambda \le 0$

Steget *h* kan vara hur stort som helst om detta är uppfyllt! (Trunkeringsfelet blir dock större med *h*.)

Flerstegsmetoder

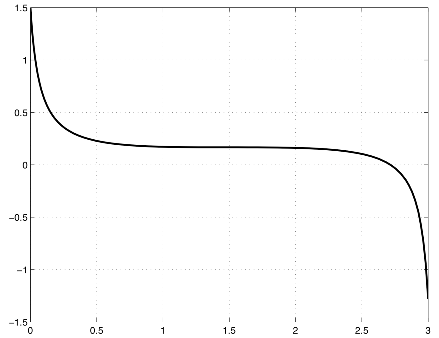
- Hittills enstegsmetoder
  - Indata (x_i, y_i)
  - Utdata (x_{i+1}, y_{i+1})
- Man kan dock använda flera punkter som indata
- Tex, **mittpunktsmetoden**
  - Utgår från **centraldifferensapproximation** (FN4)

$$y'(x_i) = f(x_i, y_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h \cdot f(x_i, y_i)$$

  - Indata $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)$
  - Noggrannhetsordning $p = 2$

Matlabs adaptiva metoder



$$y' = -(3y - x/3)^2$$
$$y(0) = 1.5$$

- Vill anpassa steget h efter funktionen!

Matlabs adaptiva metoder

- ode23, ode45, ode15s, …
- Siffror ≈ noggrannhet
- "s" ≈ specialisering för **styva problem**
  - Hög risk för instabilitet
- Adaptiv: kan inte lita på noggrannheten
  - Se FN4, integrering med quad och quadl
  - Ange lägre noggrannhet än vad som behövs, tex 10^{-6} istf 10^{-4}

Linjära randvärdesproblem (GNM kap 4.1B-C, 6.3A,C)

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Standardform för randvärdesproblem

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

- Differentialekvation med **två bivillkor**

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- Lösning: funktion $y(x), a \leq x \leq b$

- Stegmetoder (Euler, RK, Trapetsmetoden) fungerar inte!

Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

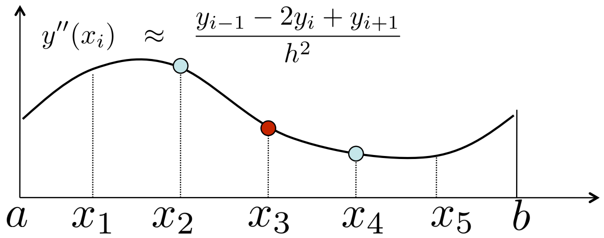
ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- Idé:
  - Välj *n* punkter $x_i = a + ih,\ i = 1, \ldots, \frac{a-b}{h} - 1$
  - Approximatera derivata med centraldifferens

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad , \; y_i = y(x_i)$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$



Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

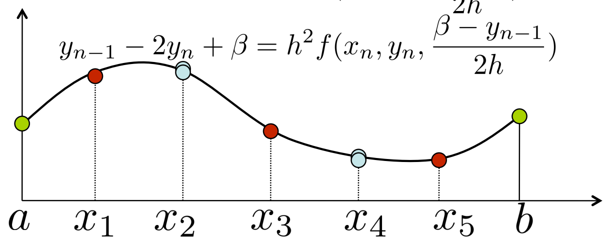
- För varje punkt gäller

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h})$$

- Specialfall i ändpunkterna

$$\alpha - 2y_1 + y_2 = h^2 f(x_1, y_1, \frac{y_2 - \alpha}{2h})$$

$$y_{n-1} - 2y_n + \beta = h^2 f(x_n, y_n, \frac{\beta - y_{n-1}}{2h})$$



Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

- På matrisform blir det

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$= h^2 \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} y_2 - \alpha \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_2 \\ \vdots \\ \beta - y_{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

- Noggrannhetsordning p = 2 (pga centraldifferens-approximation)
- Betyder att sanna värdet i x_i, $y(x_i) = y_i + ch^2$
  - **Trunkeringsfel mindre** för små h
- Bandmatrisen illakonditionerad för små h
  - **Indatafel förstärks** för små h

Linjär funktion *f*

- Exempel $y'' = x - y, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = h^2 \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

$\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} h^2-2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & h^2-2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & h^2-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h^2-2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} h^2 x_1 \\ h^2 x_2 \\ h^2 x_3 \\ \vdots \\ h^2 x_n - 1 \end{bmatrix}$$

```
y = A\b;
```


Stora linjära ekvationssystem

- Lösningen till diffekv fås alltså från linjärt ekvationssystem
- Problem: Mycket tidskrävande när antalet punkter/ekvationer, n, stort
- Beräkningstid ~ n^3

Exempel

$$y'' = x - y, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

- Analytisk lösning $y(x) = x + (1 - \frac{\pi}{2})\sin(x)$

- Kod:

```
E = [];
for n = [3 7 15]
  h = (pi/2 - 0)/(n + 1);
  x = (1:n)'*h;
  A = spdiags([1 (h^2-2) 1]*ones(n,1), -1:1, n, n);
  b = h^2*x;
  b(n) = b(n) - 1;
  y = A\b;
  E = [E; mean(y - x - (1-pi/2)*sin(x))]
  plot(x,y);
end
```

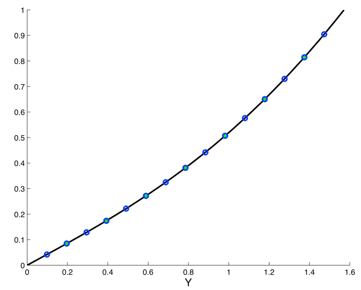
A gles:
Se till att beräkningar bara görs på nollskilda element i A!

Exempel

- Utskrift:

h	E_h(pi/8)	E_h(pi/4)	E_h(3*pi/8)	mean(E_2h)/mean(E_h)=4
0.3927	-1.365158e-03	-2.089119e-03	-1.695132e-03	
0.1963	-3.347732e-04	-5.124140e-04	-4.159263e-04	4.08
0.0982	-8.329699e-05	-1.275034e-05	-1.035035e-04	4.02

- Plot:



Ickelinjära randvärdesproblem (GNM kap 4.2, 6.3A,C)

Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

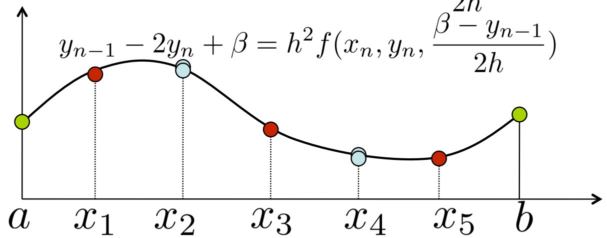
- För varje punkt gäller

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h})$$

- Specialfall i ändpunkterna

$$\alpha - 2y_1 + y_2 = h^2 f(x_1, y_1, \frac{y_2 - \alpha}{2h})$$

$$y_{n-1} - 2y_n + \beta = h^2 f(x_n, y_n, \frac{\beta - y_{n-1}}{2h})$$



Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

- På matrisform blir det

$$
\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}
$$

$$
= h^2 \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} y_2 - \alpha \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_2 \\ \vdots \\ \beta - y_{n-1} \end{bmatrix} \right)
$$

Ickelinjär funktion *f*

- Kan skrivas som ekvationssystem

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{F}(\mathbf{y}) = 0$$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{y}) = -h^2 \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}
$$

- Löses med Newton-Raphson (flervariabelvarianten)

Newton-Raphson

- En variabel (se FN2)

$$x_{i+1} = x_i - g(x)/g'(x)$$

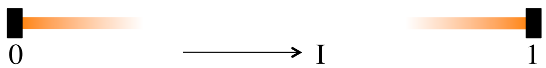
- Flera variabler
  - **Jacobian** är flervariabel-motsvarigheten till derivata

$$
\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)\mathbf{h}_i = \mathbf{G}(\mathbf{x}_i)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{h}_i$$

Exempel (GNM 6.24)

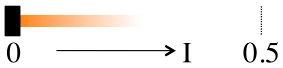


- Temperaturfördelning $u(x)$ i glödtråd
  - Båda ändar temp 10°K
  - Resistivitet $R(u) = 1 + 0.08u$
  - Strömstyrka I A
  - Strålningskonstant σ = 10^{-7}

$$u'' = \sigma u^4 - I^2 R(u), u(0) = 10, u(1) = 10$$

- Symmetri: Studera x = 0 – 0.5

Exempel (GNM 6.24)



- Ett av randvillkoren nu en derivata

$$u'' = \sigma u^4 - I^2 R(u), u(0) = 10, u'(0.5) = 0$$

- Bandmatrismetoden

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = h^2\sigma u_i^4 - h^2 I^2(1 + 0.08u_i)$$

  - Punkt *n* på randen 0.5 eftersom *u*(0.5) okänd
  - Randvillkor: $u_0 = 10$, $u_{n-1} = u_{n+1}$

$$10 - 2u_1 + u_2 = h^2\sigma u_1^4 - h^2 I^2(1 + 0.08u_1)$$
$$2u_{n-1} - 2u_n = h^2\sigma u_n^4 - h^2 I^2(1 + 0.08u_n)$$

Exempel (GNM 6.24)

- På matrisform blir det

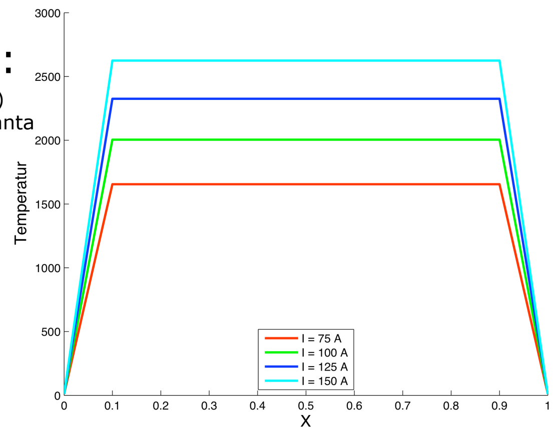
$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.08h^2I^2 - 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0.08h^2I^2 - 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0.08h^2I^2 - 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0.08h^2I^2 - 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} h^2I^2 - h^2\sigma u_1^4 + 10 \\ h^2I^2 - h^2\sigma u_2^4 \\ \vdots \\ h^2I^2 - h^2\sigma u_{n-1}^4 \\ h^2I^2 - h^2\sigma u_n^4 \end{bmatrix}$$

Exempel (GNM 6.24)

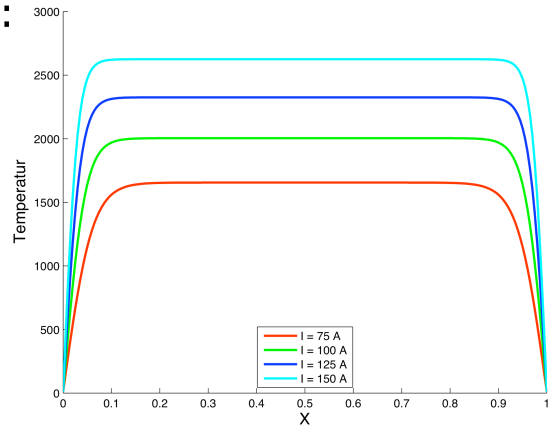
- Start-gissning:
  - Gissa *u*(0.5) genom att anta u'(0.5) = u''(0.5) = 0
  - Gissa sen form



Exempel (GNM 6.24)

- Resultat:

```
  I    u(0.5)
 75  1655.109
100  2004.149
125  2324.946
150  2624.895
```



Eget arbete

- "Minitenta" på nästa föreläsning
- Till nästa övning (tisdag):
  - Läs GNM kap 4.2, 6.3A,C
- Till nästa föreläsning (måndag):
  - Läs GNM kap 2, 4
  - Ta med GNM
- På hemsidan:
  www.csc.kth.se/DN1212/numpm09, Utdelat i menyn
  - Föreläsningsanteckningar
  - Övningstal
  - Läsanvisning till GNM
  - Labbar