DN1212 Numeriska metoder och grundläggande programmering FN8 09-03-30

Hedvig Kjellström
hedvig@csc.kth.se

Denna föreläsning

- Repetition av FN7 (GNM kap 4, 6.3)
  - Bandmatrismetoden/Finita differensmetoden
  - Linjära randvärdesproblem
  - Ickelinjära randvärdesproblem
  - Newton-Raphson för ickelinjära ekvationssystem
- Diagnostiskt prov på FN4-7
- Linjära ekvationssystem (GNM kap 4)
  - Effektivisera gausseliminering: LU-faktorisering, glesa matriser
- Felfortplantning (GNM kap 2, 4)
  - Relativfel och absolutfel
  - Konditionstal för linjära ekvationssystem
  - Bestämma konditionstalet med experimentell analys
  - Bestämma konditionstalet med teoretisk analys

Repetition av FN7 (GNM kap 4, 6.3)

Standardform för randvärdesproblem

- Differentialekvation med **två bivillkor**

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- Lösning: funktion $y(x), a \leq x \leq b$
- Stegmetoder (Euler, RK, Trapetsmetoden) fungerar inte!

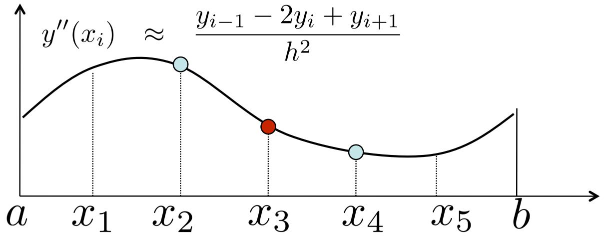
Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- Idé:
  - Välj *n* punkter $x_i = a + ih,\ i = 1, \dots, \frac{a-b}{h} - 1$
  - Approximatera derivata med centraldifferens

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i = y(x_i)$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$



Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

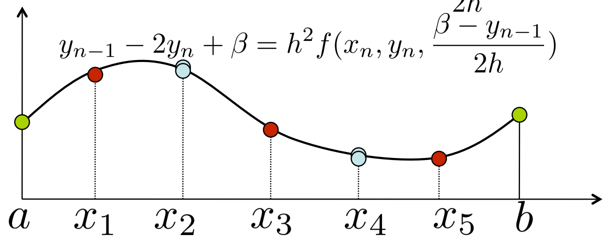
- För varje punkt gäller

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h})$$

- Specialfall i ändpunkterna

$$\alpha - 2y_1 + y_2 = h^2 f(x_1, y_1, \frac{y_2 - \alpha}{2h})$$

$$y_{n-1} - 2y_n + \beta = h^2 f(x_n, y_n, \frac{\beta - y_{n-1}}{2h})$$



Bandmatrismetoden/Finita Differensmetoden

- På matrisform blir det

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$= h^2 \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} y_2 - \alpha \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_2 \\ \vdots \\ \beta - y_{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

Linjärt exempel

$$y'' = x - y, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = h^2 \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

- Kan skrivas som ekvationssystem

$\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} h^2 - 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & h^2 - 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & h^2 - 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h^2 - 2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} h^2 x_1 \\ h^2 x_2 \\ h^2 x_3 \\ \vdots \\ h^2 x_n - 1 \end{bmatrix}$$

```
y = A\b;
```

Ickelinjär funktion *f*

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- Kan skrivas som ekvationssystem

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{F}(\mathbf{y}) = 0\ ,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{F}(\mathbf{y}) = -h^2\mathbf{f}(\mathbf{y}) + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}$$

- Löses med Newton-Raphson (flervariabelvarianten)

Newton-Raphson

- En variabel (se FN2)

$$y_{k+1} = y_k - g(y_k) / \frac{dg}{dy}(y_k)$$

- Flera variabler
  - **Jacobian** är flervariabel-motsvarigheten till derivata

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial G_1}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial G_2}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial G_n}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}_k)\mathbf{h}_k = \mathbf{G}(\mathbf{y}_k)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k$$

Linjära ekvationssystem (GNM kap 4)

Effektivisera gausseliminering

- Lösa ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ innebär först gausseliminering, sen återsubstitution
- Inget problem när antalet ekvationer (rader i **A**) *n* litet, men för *n* >> 10:

$$tid_{\text{Gauss}} \propto n^3$$

$$tid_{\text{Återsubst}} \propto n^2$$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

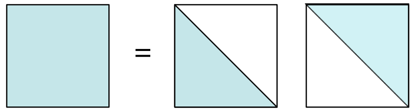
Effektivisering 1: LU-faktorisering

- Om samma **A** ska användas flera gånger med olika **x**, gausseliminera en gång för alla
- Kan göras genom **LU-faktorisering**

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Effektivisering 1: LU-faktorisering

- Många matriser **A** kan skrivas som **A** = **LU** där **L** lågtriangulär, **U** upptriangulär



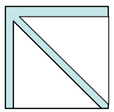
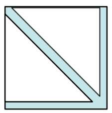
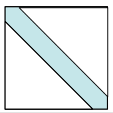
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{LUx} = \mathbf{b} \quad tid \propto n^3$

1) lös $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ (där $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$) $\quad tid \propto n^2$

2) lös $\mathbf{Ux} = \mathbf{y} \quad tid \propto n^2$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Effektivisering 2: Glesa matriser

- Gleshet ingen fördel i allmänhet: oftast inv(gles) = full
- Tex,  ger inga fördelar vid gausseliminering, $tid \propto n^3$ men kan lätt pivoteras till  som gausselimineras på $tid \propto n$
- Bandmatriser  gausselimineras på $tid \propto bn$ där *b* = #band

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Effektivisering 2: Glesa matriser

- Skapa gles matris från full:
  `A_sp=sparse(A);`
- Skapa gles bandmatris med 2*b* + 1 band:
  `A_band=spdiags(band,-b:b,n,n);`
  - `band` består av kolumner som motsvarar diagonalerna
  - `n` är antalet rader/kolumner i A_`band`

Effektivisera gausseliminering

- Görs automatiskt av \:

1) Kollar om matrisen kan pivoteras till upp- eller lågtriangulär, **isåfall** pivotera och använd sen bakåt- eller framåtsubstitution

2) Kollar om matrisen gles, **isåfall** pivotera så att gleshet utnyttjas

Felfortplanting (GNM kap 2,4)

Krav på numerisk metod (som aldrig är exakt!)

- Noggrann
- Effektiv
- Stabil

Avvägning mellan dessa mäts som:
Noggrannhetsordning
Konvergensordning

Avvägning mellan dessa i val av metod:
Stabila metoder har ofta låg noggrannhets-ordning/konvergensordning

Absolutfel *e,E* och relativfel *r,R*

- Absolutfel *e*, absolutfelgräns *E*

$$e_x = \tilde{x} - x \qquad |e_x| \leq E_x$$

  - Kan oftast inte beräkna felet eftersom vi inte vet *x*, utan beräknar felgränsen som

$$E_x = |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|$$

- Relativfel *r*, relativfelgräns *R*

$$r_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} \qquad |r_x| \leq R_x$$

  - Kan oftast inte beräkna felet eftersom vi inte vet *x*, utan beräknar felgränsen som

$$R_x = \left| \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2}{\tilde{x}_2} \right|$$

Absolutfel *e,E* och relativfel *r,R*

$$\tilde{x}_1 = 3.1415924345$$
$$\tilde{x}_2 = 3.1415926932$$
$$E_x = |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| = 2.587 \cdot 10^{-7}$$
$$R_x = \left|\frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2}{\tilde{x}_2}\right| = 8.235 \cdot 10^{-8}$$

- *E*: 6 korrekta **decimaler**
- *R*: 7 korrekta **siffror**

$$x = 3.141592$$

$$\tilde{x}_1 = 60045.567322$$
$$\tilde{x}_2 = 60043.211654$$
$$E_x = |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| = 2.35568$$
$$R_x = \left|\frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2}{\tilde{x}_2}\right| = 3.923288 \cdot 10^{-5}$$

- *E*: inga korrekta **decimaler**
- *R*: 4 korrekta **siffror**

$$x = 6.004 \cdot 10^4$$

Vektornormer

- P-normen av en vektor

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

  - Oftast används:
- 2-normen (Euklidiska normen)

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$$

  - "Pythagoras sats"
  - Ibland används istället:
- ∞-normen (maximumnormen)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Matrisnormer

- P-normen av en matris

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$$

- 2-normen (Euklidiska normen)

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\| = \sqrt{\max \lambda(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$$

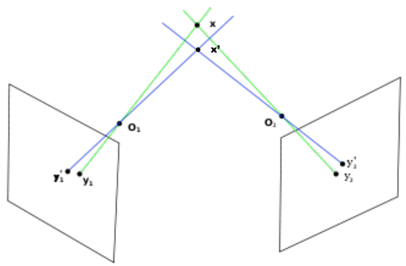
  - Dvs kvadratroten ur största egenvärdet till $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
- ∞-normen

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

  - Dvs summan av absolutbeloppen i den "tyngsta" raden i $\mathbf{A}$
  - Billigt att beräkna!

Repetition: Konditionstal *κ*

- Exempel från datorseende



κ ökar när kameror nära varandra och målet långt bort

$$\mathbf{x} = \tau(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$$
$$R_{\mathbf{x}} = \frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$
$$R_{\mathbf{y}_i} = \frac{\|\mathbf{y}_i' - \mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{y}_i\|}$$
$$\kappa = \frac{R_{\mathbf{x}}}{R_{\mathbf{y}_1} + R_{\mathbf{y}_2}}$$

Felanalys i linjära system

- Fokuserar nu på linjära ekvationssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- Konditionstalet för systemmatrisen $\mathbf{A}$ är

$$\kappa = \frac{R_{\mathbf{x}}}{R_{\mathbf{b}}}$$

- Kan bestämmas empiriskt eller teoretiskt

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Experimentell störningsräkning

$$\kappa = \frac{R_{\mathbf{x}}}{R_{\mathbf{b}}}$$

- Simulera känt $R_{\mathbf{b}}$ - stör $\mathbf{b}$ med slumpmässigt fel av känd storlek, $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \varepsilon_{\text{Random}}$ där $\|\varepsilon_{\text{Random}}\| = R_{\mathbf{b}}\|\mathbf{b}\| = E_{\mathbf{b}}$
- Lös de två ekvationssystemen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ger $R_{\mathbf{x}} = \dfrac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$
  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Teoretisk störningsräkning

$$\kappa = \frac{R_{\mathbf{x}}}{R_{\mathbf{b}}}$$

- Kan vara svårt att uppskatta relativfelgränsen $R_{\mathbf{b}}$
- Teoretiska konditionstalet
  - Teoretisk övre gräns för konditionstalet

$$\kappa = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

- **Varning:** Högt κ = osäker $\mathbf{A}^{-1}$
  - Uppskattningen av själva κ blir också osäker!
  - Alltså kan låg κ–uppskattning = 1) välkonditionerad **A**
    2) mycket illakonditionerad **A**

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Eget arbete

- Till nästa övning (torsdag):
  - Läs GNM kap 2, 4
- Till nästa föreläsning (14/4):
  - Om du använder GNM: Skumma kap 2-6
  - Om du inte använder GNM: **Större eget ansvar!** Skriv ut läsanvisning till GNM. Leta reda på texter (Tex Gerd Erikssons häfte, Wikipedia, Mathworld) som täcker alla avsnitt på nivå II-IV. Skumma dessa
  - **Du kommer inte ha nytta av FN9,10 om du inte läst i förväg**
- På hemsidan:
  www.csc.kth.se/DN1212/numpm09, Utdelat i menyn
  - Föreläsningsanteckningar
  - Övningstal
  - Läsanvisning till GNM
  - Labbar

ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY