Beatrice Frock, NADA

2D1212 NumProg, Kompletterande material

Störningsräkning.

Problem: hur påverkar mätfel, eller osäkerhet i en eller i flera parametrar, det erhållna slutresultatet av en beräkning?
Med andra ord, med en känd felgräns i indata till en algoritm, hur kan vi skatta det resulterande felet i utdata?
Problemet kan angripas med en teoretisk formel (lämpligt för enklare uttryck), eller experimentellt, med hjälp av störningsanalys eller störningsräkning ("perturbation analysis" på engelska).

I. Teoretiskt resultat. Felfortplantningsformeln.

Givet är $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, där absoluta felet i x_i betecknas e_{x_i}. Man kan visa att absoluta felet i f,

$$|e_f| \lesssim |\frac{\partial f}{\partial x_1}| \cdot |e_{x_1}| + \ldots + |\frac{\partial f}{\partial x_n}| \cdot |e_{x_n}|$$

Jämför **differentialen** i matematik. Här är högre ordnings termer försummade, därför tecknet $\lesssim$ eller "mindre än eller approximativt lika med" (men dessa termer måste tas med när de partiella derivatorna varierar kraftigt, t.ex. nära en extrem punkt).

II. Experimentell störningsräkning.

Ett enkelt sätt att skatta e_f m.h.a. numeriska experiment, är att beräkna värdet av f med alla möjliga kombinationer av störda x_i (med både $x_i + e_{x_i}$ och $x_i - e_{x_i}$).
Ett approximativt värde på f är då mittpunkten av intervallet $[f_{min}, f_{max}]$, med $e_f = \pm\frac{(f_{max}-f_{min})}{2}$, dvs halva intervallets längd.

Detta är en mycket **ineffektiv** teknik, som kräver många funktionsberäkningar när flera parametrar x_i ingår. Med n variabler krävs ju 2^n funktionsberäkningar (kombinationer av störningar)!
Effektiv störningsanalys utförs genom att skatta derivatorna i den teoretiska felfortplantningsformeln med framåt (eller bakåt) differenskvoten.
Detta är ekvivalent med att systematiskt störa en variabel i taget, åt ett håll (uppåt eller neråt), och sedan summera alla felbidrag,

$$e_f \approx |f(x_1 + e_{x_1}, x_2, \ldots, x_n) - f_{ref}| + \ldots + |f(x_1, x_2, \ldots, x_n + e_{x_n}) - f_{ref}|$$

med $f_{ref} = f(x_1, \ldots, x_n)$, dvs ett referensvärde beräknat med ostörda parametrar x_i.

Metoden kräver totalt n störda funktionsberäkningar, samt en ostörd, för referensvärdet.
Denna teknik bör alltid tillämpas då problemet innehåller fler än två eller tre parametrar eller variabler.

Exempel.
Skatta felet i y p.g.a osäkerhet i variablerna x_1 och x_2, då $y = \sin({x_1}^2 \cdot x_2)$, där $x_1 = 0.75 \pm 10^{-2}, \quad x_2 = 0.413 \pm 3 \cdot 10^{-3}$.
I. Felfortplantningsformeln:

$$e_y \approx |2x_1x_2 \cos({x_1}^2x_2)| \cdot 10^{-2} + |{x_1}^2 \cos({x_1}^2x_2)| \cdot 3 \cdot 10^{-3} \approx 0.77 \cdot 10^{-2}$$

och y beräknas som $\sin(0.75^2 \cdot 0.413) = 0.230229$. Obs.: använd radianmått!
Vi får därför $\tilde{y} = 0.230229 \pm 0.77 \cdot 10^{-2}$ eller (hellre) $\tilde{y} = 0.23 \pm 0.8 \cdot 10^{-2}$.
Vi avrundar svaret, eftersom felanalysen visar att vi inte har fler än 1 eller eventuellt 2 korrekta decimaler i svaret. En felgräns avrundas uppåt, aldrig neråt.

II. Experimentell störningsräkning: Vi betraktar samma problem, nu med (effektiv) experimentell störningsanalys:

$$e_y \approx |y(0.75 + 10^{-2}, 0.413) - y_{ref}| + |y(0.75, 0.413 + 3 \cdot 10^{-3}) - y_{ref}| \approx 0.77 \cdot 10^{-2}$$

dvs samma resultat erhålls (efter avrundning), och samma slutsats. De två termerna blir 0.0061 resp. 0.0016, vilket innebär att osäkerhet i x_1 lämnar ett större bidrag till det totala felet.
Endast två störda funktionsberäkningar krävdes, samt en ostörd för referensvärdet. Med den intuitiva max-min metoden skulle det krävas 2^2 störda beräkningar, och med ett större antal parametrar växer antalet beräkningar exponentiellt. Den effektiva metoden innebär n störda funktionsberäkningar för n parametrar.