

Lösningsförslag till tentamen i 2D1212
Tisdag 2008-05-06 kl 9-12

P1. Ickelinjär ekvation

a.(2) Newtons metod för detta problem givet startgissningen $x_0 = -0.5$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 + 2x_n - x_n^2/4}{2 - x_n/2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

b. (2) Konvergenshastigheten hos Newtons metod är kvadratisk och ges av att $h_n \approx Kh_{n-1}^2$ vilket kan utläsas ur tabellen.

P2. Numerisk integrering

Följande integral skall lösas numeriskt

$$I = \int_0^1 (1 + e^{-x^3/3}) dx$$

a.(2) Trapetsregeln för ovanstående problem

$$T(h) = h\left(\frac{1}{2}f(0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(1)\right)$$

där $f(x_i) = 1 + e^{-x_i^3/3}$.

b.(1) Trapetsregeln har noggrannhetsordning 2.

c. (3) Exempel på ett matlabprogram som beräknar integralvärdet:

```
clear all
Trap=[];
h0=0.1; % Välj en steglängd
for h=[h0,h0/2,h0/4] % Halvera steglängden
    x=[0:h:1];
    f=exp(-x.^3/3)+1;
    T=h*sum(f)-0.5*h*(f(1)+f(end)); % Trapetsregeln
    Trap=[Trap;T]; % Spara uträknat värde
end
Trap % Skriv ut värdena på slutet
```

d. (3) Noggrannhetsordningen kan bestämmas med hjälp av antagandet att felet $E(h) = T(h) - I \approx Ch^p$, där p är noggrannhetsordningen. Vi har då

$$\left| \frac{E(h) - E(h/2)}{E(h/2) - E(h/4)} \right| \approx \left| \frac{Ch^p - C\left(\frac{h}{2}\right)^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p - C\left(\frac{h}{4}\right)^p} \right| = \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2^p} - \frac{1}{4^p}} = 2^p.$$

Med givna data får vi

$$\left| \frac{T(0.2) - T(0.1)}{T(0.1) - T(0.05)} \right| = \left| \frac{1.9234 - 1.9238}{1.9238 - 1.9239} \right| = \frac{4}{1} = 4$$

dvs $p = 2$ och noggrannhetsordningen är två.

P3. Randvärdesproblem

- a.(4) Dela in $t = [1, 3]$ i 4 delintervall av längden $h = 0.5$ och låt $t_j = jh + 1$ där $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Låt $u_j \approx u(t_j)$ och approximera ekvationen i de inre punkterna enligt

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} - t_j u_j = 0, \quad j = 1, 2, 3$$
$$u_0 = 2 \quad u_4 = 4$$

Samlar vi ihop termer så får vi

$$u_{j+1} - (2 + h^2 t_j) u_j + u_{j-1} = 0$$

och det linjära ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} -(2 + 0.5^2 \cdot 1.5) & 1 & 0 \\ 1 & -(2 + 0.5^2 \cdot 2.0) & 1 \\ 0 & 1 & -(2 + 0.5^2 \cdot 2.5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- b.(1) Tidsåtgången för en tridiagonal matris ges av att $t \approx KN$. Här får vi att $K = 0.01/3$ och tiden blir $t = 1.99/3$

P4. Begynnelsevärdesproblem

Vi vill beräkna $y(t)$ som uppfyller följande andra ordningens differentialekvation

$$y'' + 3y' = 12, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 1$$

- a. (2) Inför $y = u_1$ och $y' = u_2$ så erhålles följande system

$$u_1' = u_2, \quad u_1(0) = 5$$
$$u_2' = 12 - 3u_2, \quad u_2(0) = 1$$

- b. (2) Eulers metod för systemet blir

$$u_1^{n+1} = u_1^n + h u_2^n, \quad u_1^0 = 5$$
$$u_2^{n+1} = u_2^n + h(12 - 3u_2^n), \quad u_2^0 = 1$$
$$t^{n+1} = t^n + h, \quad t^0 = 0$$

- c. (3) Med $u_1^1 = 5.1$, $u_2^1 = 1.9$ och $h = 0.1$ får vi

$$u_1^1 = u_1^1 + 0.1 u_2^1 = 5.1 + 0.1 \cdot 1.9 = 5.29$$
$$u_2^1 = u_2^1 + 0.1(12 - 3u_2^1) = 1.9 + 0.1(12 - 3 \cdot 1.9) = 2.53$$

och $y(0.2) = 5.29$ och $y'(0.2) = 2.53$.

- d. (2) Noggrannhetsordningen är 4. Den ges av att $\log e_t = p \log h$ där e_t är trunckeringsfelet och p är noggrannhetsordningen och ges utav lutningen på den räta linjen.

P5. Begynnelsevärdesproblem

- a. (2) När man använder Euler framåt så finns ett krav på steglängden för att metoden skall fungera (vara stabil). Vi har använt en för stor steglängd vilket gör Euler framåt instabil och ger en felaktig lösning.
- b. (3) Med $u = y_{n+1}$ så blir fixpunktsiterationen $u^{k+1} = y_n + h(-100u^k + \sin u^k) = G(u^k)$. Villkoret för att fixpunktsmetoden skall konvergera är att $|G'(u)| < 1$ i närheten av roten. Detta ger oss att $|h(-100 + \cos u)| < 1$. $|-100 + \cos u|$ kan anta värden mellan 99 och 101 dvs $h < \frac{1}{101}$ är ett nödvändigt villkor för att fixpunktsmetoden skall konvergera.
- c. (2) För att slippa kravet på steglängden kan Newtons metod med lämplig startgissning användas för att lösa den icke-linjära ekvationen.