KTH CSC/Nada
Gerd Eriksson

Tillämpningsuppgifter i Numeriska metoder

U1: Kulor på snöre

U2: Kollision i mörkret

U3: Bouleväskan

U4: Tvättlinan

U5: Metallröret

U6: Partikelbanan

U7: Samspel i naturen

U8: Ljudvågor under vattnet

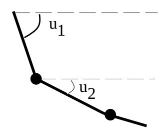
U9: Bollkast med studs

U1: Kulor på snöre

Anna har kulörta kulor av blandade storlekar i en låda. Hon väljer ut några kulor (mellan fem och tio stycken), fäster dem på ett rött sidenband med varierande avstånd och knyter fast bandets båda ändar på lika höjd i köksfönstret. Uppgiften är att rita upp Annas fönsterdekoration.

Teori: Häng bandet i x-axeln mellan origo och $x = a$ och låt antalet kulor vara n med massorna m_1, m_2,…, m_n. Kulorna är så tunga att sidenbandets vikt är försumbar. Bandlängderna är $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_N$ där $N = n+1$. Summan av bandlängderna måste förstås vara större än avståndet a mellan upphängningspunkterna. Det är lämpligt att som obekanta införa de N vinklarna u_1, $u_2, \ldots$, enligt figuren. Vinklarna uppfyller: $\pi/2 > u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_N > -\pi/2$. Motivera det!

Rent geometriskt måste följande samband gälla (motivera!)



$$\sum_{i=1}^{N} L_i \cos u_i = a, \quad \sum_{i=1}^{N} L_i \sin u_i = 0$$

Spännkraften S i varje bandstump har horisontell och vertikal komponent. Jämvikt kräver att

$$\begin{aligned} S_i \cos u_i &= S_{i+1} \cos u_{i+1}, & S_i \sin u_i &= S_{i+1} \sin u_{i+1} + m_i g \\ S_{i+1} \cos u_{i+1} &= S_{i+2} \cos u_{i+2}, & S_{i+1} \sin u_{i+1} &= S_{i+2} \sin u_{i+2} + m_{i+1} g \end{aligned}$$

Elimineras S_i, S_{i+1} och S_{i+2} ur dessa ekvationer fås följande samband (motivera!)

$$m_{i+1} \tan u_i - (m_i + m_{i+1}) \tan u_{i+1} + m_i \tan u_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-2.$$

Dessa kraftsamband utgör tillsammans med de båda geometriska villkoren ett ickelinjärt ekvationssystem för bestämning av vinklarna. Lös det!

Annas pyrotekniskt intresserade pojkvän har i hemlighet preparerat bandet och kulorna och vid nyårsfirandet tänder han på bandet i origo. Det brinner sakta som en stubin utan att gå sönder, men varje gång lågan passerar en kula exploderar kulan och sprider färggrann konfetti över festdeltagarna. Rita upp de olika former kulbandet antar när kula efter kula försvinner, tills så få kulor är kvar att bandet inte hålls sträckt längre.

Annas dekorationsdata: $a = 80$, $\mathbf{L} = [23\ 10\ 15\ 6\ 20\ 8\ 18\ 15]$, $\mathbf{m} = [7\ 2\ 5\ 3\ 1\ 9\ 4]$.

Du ska dessutom lösa problemet för en egen uppsättning data med andra bandlängder och kulmassor (minst sex olika tunga kulor ska snöret ha).

U2: Kollision i mörkret

I Axelby ligger torget i origo och tvärs genom byn går den alldeles raka X-gatan. Ytterligare en väg leder genom byn, det är den slingriga gamla landsvägen Y-slingan (numera cykelväg) som korsar X-gatan med allt tätare intervall mot utkanten av byn. Y-slingan följer formeln

$$Y(x) = 0.51\, e^{-0.056x} \sin{(x^2)}.$$

Osquar börjar sin kvällspromenad vid torget och promenerar med raska steg och konstant hastighet längs X-gatan ut från byn. Vid gatlyktan som finns i första vägkorsningen efter torget tittar han på klockan, den är kvart i nio.

Maggan är samtidigt ute på cykeltur på Y-slingan. På sin artonväxlade hoj far hon fram ganska precis två och en halv gång så snabbt som Osquar går. I en av alla dessa vägkorsningar möts de två och undviker med en hårsmån att kollidera i mörkret (så här långt från torget finns inga gatlyktor längre). Skattande sig lyckliga fortsätter Osquar och Maggan på var sin väg med oförminskad hastighet. Men i nästa korsning är krocken ett faktum!

Krockplats? Hastighetsförhållande? Var befann sig Maggan kvart i nio?

Ur informationen ovan är det möjligt att bestämma krockplatsen och finna det verkliga hastighetsförhållandet q mellan Maggan och Osquar. Hur nära 2.5 hamnar det?
(En hel del båglängdsberäkningar krävs där integrationsgränserna utgörs av nollställen till uttrycket för Y-slingan.)

Ytterligare en fråga ska besvaras: I vilken punkt på Y-slingan befann sig Maggan då klockan var kvart i nio? Hennes position vid denna tidpunkt bestäms av sambandet *Magganväg*$=$ $q\cdot$*Osquarväg*. Lös med en effektiv ekvationslösningsalgoritm; tänk också på att vara smart i det iterativa förfarandet så att varje ny båglängdsberäkning endast behöver utföras över ett kort integrationsintervall.

Gör noggrannhetsbedömning av resultatet med hänsyn tagen till de numeriska metoder som du använt.

Vid rekonstruktionen av olyckan kom det fram att Maggan alltid sneddade i kurvorna så att hon i själva verket följde $y(x) = C \cdot Y(x)$ med ett C-värde strax under ett. Först ryktas det att $C = 0.96$. Hur mycket påverkar det resultaten (q-värdet och Maggans läge kvart i nio)? Någon säger sedan att Maggan sneddar värre än så, $C = 0.92$ ligger nog närmare verkligheten. Hur mycket påverkas resultaten av denna förmodan?

Rita X-gatan, Y-slingan och Maggans sneddade färdväg i fallet $C = 0.92,$ markera krockplatsen och Maggans läge klockan kvart i nio i de olika fallen.

U3: Bouleväskan

En piriformkurva definieras av ekvationen $x^4 - x^3 + y^2/b^2 = 0$ för $0 \leq x \leq 1$. Rita upp några piriformer för b-värden mellan ett och tre. Namnet piriform betyder päronform — för vilket b-värde passar namnet bäst?

En moderiktig boulespelare bär helst sina bouleklot (med radien R) i en väska med plana parallella sidor (planen $z = R$ och $z = -R$) som är piriformytor med b-värdet 1.8. Bärhandtaget finns i origo och väskans utsträckning i x-led är en längdenhet.

Standardväskan innehåller två bouleklot. Kloten kan inte rulla omkring i väskan, utan de nuddar varandra och tangerar dessutom väskans kurviga sarg på två ställen vardera. Problemet blir att bestämma klotens radie och placering i väskan — mittpunktskoordinater: $(a,\, R,\, 0)$ och $(a,\, -R,\, 0)$.

Betrakta genomskärningen i planet $z = 0$ som innehåller två cirklar och en omgivande piriform. Cirkeln i övre halvplanet tangerar piriformkurvan i två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2). Sex obekanta finns: tangeringspunkternas koordinater samt a och R. Ställ upp sex samband och lös det ickelinjära ekvationssystemet. Det går att reducera antalet obekanta, men då kommer man inte ifrån rotuttryck i ekvationerna vilket komplicerar deriveringen.

Till boulespelet hör en liten målkula som brukar kallas lillen eller grisen. Det finns olika tänkbara placeringar för den i piriformväskan. Om den liksom de båda övriga kloten ska ha centrum i planet $z = 0$, finns ett lagom utrymme för lillen mellan de båda bouleklоten och väskans kant vid $x = 1$ (problemet betraktat som ett 2D-problem i planet $z = 0$). Beräkna största möjliga radie för lillen och räkna ut kvoten mellan lillens radie och bouleklotens radie.

Om bouleväskan med sina bouleklot ritas i 3D ser man att målkulan kan göras större om den flyttas ned i z-led. Förutom att nudda kanten $x = 1$ får den tangera planet $z = -R$. Räkna ut lillens maximala radie r_{lill} i detta fall och kvoten r_{lill}/R. Passa på att lägga in en reservmålkula som tangerar planet $z = R$ också. Visa en tredimensionell bild av kloten och den omgivande piriformväskan.

U4: Tvättlinan

En tvättlina med längden 2.5 meter är elastisk med fjäderkonstanten k. På den osträckta linan mellan punkterna (0, 2) och (2.5, 2) finns n stycken krokar (knutpunkter) på inbördes lika avstånd $L_x = 2.5/(n+1)$, där man hänger galgar med olika tunga plagg. Plagget på den i-te kroken har tillsammans med galgen och kroken massan m_i.

Kraftsambanden kring varje knutpunkt ger ett ickelinjärt ekvationssystem med $2n$ ekvationer för att bestämma de $2n$ obekanta x- och z-värdena för knutpunkterna.
Låt den i-te punkten betecknas $\mathbf{H}$ (= here), dess västra granne $\mathbf{W}$ och dess östra granne $\mathbf{E}$. Den töjda linan mellan $\mathbf{W}$ och $\mathbf{H}$ har längden $L_W = \|\mathbf{W} - \mathbf{H}\|_2$.

Vid punkten $\mathbf{H}$ lyder kraftekvationen:

$$\mathbf{S}_W + \mathbf{S}_E - m_H\, g\, \mathbf{e}_z = 0$$

där $\mathbf{S}_W = k(1 - L_x/L_W)(\mathbf{W} - \mathbf{H})$, och $\mathbf{S}_E$ erhålls genom att byta W mot E.

Lös det erhållna ickelinjära ekvationssystemet med Newtons metod och utnyttja differenskvoter som approximation till jacobianelementen.

Testdata: Fjäderkonstanten $k = 250$, tyngdaccelerationen $g = 9.81$, antalet krokar $n = 5$. Plaggens vikt (i kg): $m_1 = 0.4$, $m_2 = 0.1$, $m_3 = 0.4$, $m_4 = 0.7$, $m_5 = 0.2$.
Rita resultatet! Undersök också hur mycket maximala nedhängningen påverkas, då plaggen byter plats på linan.
Pröva sedan andra n-värden och upphängda plagg med andra vikter.

U5: Metallröret

Genom ett tjockväggigt cylindriskt metallrör strömmar en het vätska med den konstanta temperaturen 450° C. Cylinderväggen har innerradien 1.0 cm och ytterradien 2.0 cm. Temperaturfördelningen $u(r)$ i metallen bestäms av differentialekvationen

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0 \quad \text{med} \quad u = 450 \quad \text{vid} \quad r = 1 \quad \text{(längdenhet cm).}$$

Omgivande temperatur är 20° C. Vid $r = 2$ är temperaturgradienten du/dr proportionell mot temperaturdifferensen, d v s där gäller $du/dr = -K \cdot (u - 20)$.
K är en materialkonstant, det så kallade värmeöverföringstalet mellan metall och luft. Låt metallen i testfallet ha $K = 1$.

Gör enligt finitadifferensmetoden en diskretisering av intervallet $1 \leq r \leq 2$ indelat i N delintervall. Visa hur randvärdesproblemet kan approximeras av ett matrisproblem. Lös detta först för $N = 25$, fortsätt med successiva fördubblingar av N tills önskad precision erhålls — t ex fyra korrekta siffror i temperaturvärdet vid cylinderns ytterradie. Rita upp temperaturfördelningen i metallen.

Man tillåter inte att metallcylinderns utsida får bli varmare än 100°. Beräkna vilket som är det kritiska K-värdet för metallen för att detta ska uppnås.

Undersök även hur känsligt detta kritiska K-värde är för temperaturvariationer i vätskan. Det inträffar nämligen att vätskan i röret råkar stiga till 460° C i stället för att hålla det givna temperaturvärdet 450° C.

(Problemet kan lösas analytiskt, gör gärna det för kontroll.)

Det visar sig att det tjockväggiga röret är tillverkat av ett inhomogent material — värmediffusiviteten i röret har ett radiellt beroende. Temperaturfördelningen $u(r)$ bestäms nu av

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + \left(1 + \frac{rD'(r)}{D(r)}\right)\frac{du}{dr} = 0, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

$D(r)$ är ett tredjegradspolynom med derivatan noll vid inner- och ytterradien, alltså vid $r = 1$ och $r = 2$, dessutom gäller $D(2) = 2D(1)$.

Begynnelsevillkor och randvillkor är samma som tidigare. Lös samma uppgifter som ovan.

U6: Partikelbanan

Laddade partiklar rör sig med hög hastighet in i ett område där det finns två elektromagnetiska kraftfält. Vid passagen inuti de båda kraftfälten kröks partikelbanorna. Utanför kraftfälten är banorna rätlinjiga.

Fälten finns inom två cirkulära cylindrar båda med radien R och med axlarna parallella med z-axeln, mittpunkter vid $x = a_1,\ y = b_1$ respektive $x = a_2,\ y = b_2$. Det elektriska fältet i cylindrarna är $\mathbf{E} = E\,(1,\,0,\,0)$ respektive $\mathbf{E} = E\,(-1,\,0,\,0)$ med konstant fältstyrka E. Det magnetiska fältet är riktat i z-led och är starkast i mitten. I första cylindern gäller $\mathbf{B} = B\,(0,\,0,\,1 - w\,\frac{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}{R})$ och i den andra: $\mathbf{B} = B\,(0,\,0,\,-(1 - w\,\frac{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}{R}))$. w är en viktfaktor med ett värde mellan 0 och 0.5.

Om partikelns position vid tiden t beskrivs med vektorn $\mathbf{r}(t)$ så gäller följande differentialekvation för partikelrörelsen: $m\ddot{\mathbf{r}} = Q\,(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$, där m är partieklns massa och Q dess laddning.

Betrakta först rörelsen för *en* partikel. Den har hastigheten v_0 när den kommer farande längs negativa x-axeln i positiv riktning. Vi börjar studera rörelsen när den passerar origo. Om partikelns hastighetskomponent i z-led är noll utanför fälten så förblir den noll inuti de ovan beskrivna fälten; partikelbanan blir plan och kan beskrivas med enbart x- och y-koordinater. I detta fall erhålls differentialekvationerna

$$\ddot{x} = \frac{Q}{m}\left(E + \left(1 - w\frac{r_1}{R}\right)B\dot{y}\right), \quad \ddot{y} = -\frac{Q}{m}\left(1 - w\frac{r_1}{R}\right)B\dot{x}\ \text{, där}$$

$$r_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2},$$

om partikeln befinner sig i första kraftfältet. Härled dessa uttryck ur kryssprodukts-formeln ovan. På motsvarande sätt erhålls uttrycken inom andra kraftfältet. Utanför cirklarna (som cylindrarna nu reducerats till) gäller $m\ddot{\mathbf{r}} = 0$, d v s partikelrörelsen blir rätlinjig.

Vår studie gäller elektroner med massan $m = 9.1091 \cdot 10^{-31}$ kg och negativ laddning $Q = -1.6021 \cdot 10^{-19}$ C. Hastigheten är $v_0 = 455 \cdot 10^3$ m/s. Övriga data: $E = 20.0$ V/m, $B = 0.92 \cdot 10^{-4}$ Wb/m^2, $R = 0.012$ m, $a_1 = 0.015,\ b_1 = 0,\ a_2 = 0.030,\ b_2 = 0.034$. Viktfaktor $w = 0.2$.

Beräkna elektronens bana från $x = 0$ tills den med god marginal lämnat den andra cylinderns kraftfält. Utnyttja kunskapen om rätlinjig rörelse utanför kraftfälten (med ekvationslösning för skärning mellan rät linje och cirkel). Använd RK4 för lösning av ode-systemet inuti kraftfälten och utför lämplig interpolation för att erhålla elektronens position precis vid utgången av varje fält. Pröva dig fram till lagom tidssteg som ger acceptabel noggrannhet och motivera det valda steget!

Låt nu tre elektroner alla med hastigheten v_0 i x-riktningen komma in i parallella banor; startpositioner vid $t = 0$ är $x = 0$ och $y = -0.002,\ 0,\ 0.002$. Beräkna och rita de tre elektronbanorna med samma viktfaktor $w = 0.2$ som ovan. Efter passagen genom kraftfälten är banorna inte parallella längre. Genom att förflytta det andra fältet i y-led (alltså ändra b_2-värdet) kan man åstadkomma att banorna för elektron nr 1 och 3 blir parallella igen. Använd någon effektiv algoritm för att bestämma cylinderplaceringen.

Magnetfältets styrka beror av viktfaktorn w. Man vill studera hur en ändring av w-värdet påverkar slutriktningen för de parallella elektronbanorna. Utför beräkningarna för $w = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5$.

U7: Samspel i naturen

Vid början av år noll planteras 100 exemplar av en nyttoväxt på en bördig ö. Beståndet utvecklar sig snabbt med tiden enligt $dV/dt = a_1 V - a_2 V^2$, där $V(t)$ är antalet växter vid tiden t (tidsenheten är år). Konstanterna är $a_1 = 16$ och $a_2 = 1.8 \cdot 10^{-5}$. Differentialekvationen är analytiskt lösbar (separabel) men kan förstås också lösas numeriskt. Man finner att då t ökar så närmar sig $V(t)$ ett konstant slutvärde, vilket?

Låt tidpunkten vara T_1 då antalet växter stigit till 95% av slutvärdet. Ange hur många dagar efter inplanteringen som detta uppnås. Använd RK4 med tidssteget en dag, alltså $dt = 1/365$, för att finna dagen. Men pröva dessutom om RK4 med tidssteget en vecka (och viss interpolation) leder till samma dag.

Just den dagen anländer två växtätande djur till ön (man kan väl tänka sig ett par möss). Samspelet mellan växterna och djuren kan beskrivas med följande differentialekvationer, där $S(t)$ betecknar antalet skadedjur: $dV/dt = a_1 V - a_2 V^2 - a_3 V S$, $dS/dt = -b_1 S^{1.4} + b_2 V^{0.6} S^{0.8}$.

I växtekvationen tillkommer termen $-a_3 V S$ som effekt av att skadedjuren dykt upp, konstanten $a_3 = 0.011$. Djuren har svårigheter att öka ju fler de är, därav den negativa första termen i dS/dt, konstanten är $b_1 = 2.0$, Djurantalet ökar däremot när de har möjlighet att utnyttja födan; i den positiva andra termen gäller $b_2 = 0.085$.

Detta differentialekvationssystem har då t går mot oändligheten en konstant stabil lösning. Sätt derivatorna lika med noll och lös det ickelinjära system som ger slutvärdena för V och S.

Lös differentialekvationerna numeriskt med lämplig metod fram till tidpunkten $T_2 = 1.5$ (d v s ett och ett halvt år efter växtplanteringen). Har antalet växter och skadedjur hunnit stabilisera sig? Hur många procent (eller promille) avviker deras värden från slutvärdena?

Vid denna tid införs rovdjur (ett ormpar) på ön för att hålla de växtätande mössens antal nere och därmed öka mängden av växter. Man får ett differentialekvationssystem där växtekvationen är oförändrad (ormarna äter inte växterna). Skadedjursekvationen blir nu

$$dS/dt = -b_1 S^{1.4} + b_2 V^{0.6} S^{0.8} - b_3 S R, \quad dR/dt = -c_1 R + c_2 S \sqrt{R}.$$

Med lämpligt valda värden på konstanterna i modellen gäller även här att V, S och R för stora t-värden närmar sig en konstant stabil lösning. Låt $b_3 = 1.5$, $c_1 = 2.0$ och $c_2 = 0.025$. Sätt derivatorna till noll och lös ut slutvärdena för V, S och R.

Lös differentialekvationssystemet tills tre år gått sedan växterna planterades, $T_3 = 3$. Hur nära sina slutvärden har de inblandade parterna nått?

Hjälper besprutning?

Öborna som utnyttjar växterna och vill skörda frukterna är ändå inte nöjda — man tycker att skadedjuren äter för mycket. Vid tidpunkten T_3 beslutar man sig för en årlig besprutningskampanj, som är så anpassad att 70 procent av skadedjuren dödas vid varje års besprutning. Effekten är tyvärr sådan att även rovdjursstammen drabbas, 20 procent av rovdjuren dödas samtidigt varje år av giftet.

Lös alltså differentialekvationssystemet med besprutning varje år införd. Efter någon tid har bestånden stabiliserats till nya värden (en periodisk lösning uppstår). Har öborna gjort rätt? Studera växtbeståndet under ett år före och efter besprutningskampanjen.

Hur känslig är denna ekologiska modell för störningar i koefficienterna? Gör några numeriska experiment med små (eller kanske stora) förändringar i någon eller några koefficienter och undersök hur resultatet blir! Experimentera också med andra besprutningsmedel som påverkar skadedjurs- och rovdjursbestånden annorlunda än det först prövade giftet.

U8: Ljudvågor under vattnet

Modifierad version av uppgift P8-15 i Kahaner-Moler-Nash.

The speed of sound in ocean water depends on pressure, temperature and salinity, all of which vary with depth in fairly complicated ways. Let z denote depth in feet under the ocean surface (so that the positive z axis points down) and let $c(z)$ denote the speed of sound at depth z. We shall ignore the changes in sound speed observed in horizontal directions. It is possible to measure $c(z)$ at discrete values of z; typical results can be found in the table. We need $c(z)$ and also $c'(z)$ between data points. Fit the data in a least-squares sense with the model function

z	$c(z)$
0	5050
500	4980
1000	4930
1500	4890
2000	4870
2500	4865
3000	4860
3500	4860
4000	4865
5000	4875
6000	4885
7000	4905
8000	4920
9000	4935
10000	4950
11000	4970
12000	4990

$$c(z) = 4800 + p_1 + p_2 \frac{z}{1000} + p_3\, \mathrm{e}^{-0.75\, z/1000}$$

Make a plot over the data points and the received model curve $c(z)$. Since the sound speed varies with depth, sound rays will travel in curved paths. A fixed underwater point emits rays in all directions. Given a particular point and initial direction we would like to follow the ray path. Thus letting x be the horizontal coordinate we know the initial values: $x = 0,\ \ z = z_0,\ \ dz/dx = \tan\beta_0$, where β_0 denotes the angle between the horizontal line $z = z_0$ and the ray in the start point.

The ray path $z(x)$ is described by the following second order differential equation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -q_0 \frac{c'(z)}{c(z)^3}$$

where $q_0 = (c(z_0)/\cos\beta_0)^2$. Use the Runge-Kutta method (or `ode45`) to trace the ray beginning at $z_0 = 2000$ feet and $\beta_0 = 7.8$ degrees. Follow the ray for 25 nautical miles (1 nautical mile is 6076 feet). Plot the curve $z(x)$. You should find that the depth at $x_\mathrm{f} = 25$ nautical miles is close to 2500 feet.

Now suppose that a sound source at a depth of 2000 feet transmits to a receiver 25 miles away at a depth of 2500 feet. The above calculation shows that one of the rays from the source to the receiver leaves the source at an angle close to 7.8 degrees. Because of the nonlinearity of the equation there may be other rays leaving at different angles that reach the same receiver. Run your program for β_0 in the range from -10 up to 14 degrees, plot the ray paths and print a table of the values $z(x_\mathrm{f})$.

We are interested in finding values of β_0 for which $z(x_\mathrm{f}) = 2500$. Use an efficient algorithm to determine the rays which pass through the receiver. Discuss the accuracy of your results.

U9: Bollkast med studs

En aprildag med varma sydvindar tränar Pelle bollkast på sportplanen. Han kastar i väg bollen österut med utkastvinkeln (i vertikalplanet) 30°, hastigheten 25 m/s och höjden 1.4 m. Pelle har fötterna i origo i ett koordinatsystem med horisontella x- och y-axlar, x åt öster, y åt norr (i vindens riktning). Differentialekvationerna för bollbanan blir

$$\ddot{x} = -q\,\dot{x}, \quad \ddot{y} = -q\,(\dot{y} - a(z)), \quad \ddot{z} = -9.81 - q\,|\dot{z}|, \quad \text{där} \quad q = c\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - a(z))^2 + \dot{z}^2}.$$

Luftmotståndskoefficienten c beror av bollradien och massan och är för Pelles boll $c = 0.070$. Vindstyrkan är 7 m/s vid marken och ökar den här aprildagen med höjden enligt: $a(z) = 7 + 0.35z$.

Visa hur differentialekvationerna kan skrivas om på vektorform till ett system av första ordningens differentialekvationer och ange startvektorns komponenter.

Använd en effektiv algoritm som bestämmer kastbanan tills bollen nått mark och beräknar nedslagsplatsen noggrant – någon form av interpolation kan behövas eftersom räkningarna inte ska utföras med ett onödigt kort tidssteg. Bedöm noggrannheten i resultatet.

Rita kastbanan — plotkommandot för att rita en kurva i 3D är `plot3(x,y,z)` där `x`, `y` och `z` är vektorer som innehåller kurvpunkternas koordinater.

Pelle vill att bollen trots vinden ska slå ned rakt österut, alltså på x-axeln. Hur ska han vända sig i kastögonblicket för att åstadkomma det? Hans utkastvinkel i vertikalplanet är fortfarande 30°. Utvidga programmet med en effektiv algoritm för detta.

Pelles boll studsar faktiskt när den slår ner på marken. Bollens hastighetskomponenter blir vid studsen samma i x- och y-led som de var just vid nedslaget, medan hastigheten i z-led byter tecken.

Lägg på en lagom dämpning, till exempel en dämpningsfaktor på 0.80 vid varje studs. Visa en bild över bankurvan för den studsande bollens fem första studsar, när Pelle kastar i väg bollen så att första nedslaget hamnar på x-axeln.