DN1212 för M: Projektrapport

Krimskramsbollen

av Ninni Carlsund.

2010-04-29

2. Sammanfattning

Kramsparametern k hos en krimskramsboll har beräknats. Den välkända kramsekvationen har lösts med hjälp av numerisk integration och ekvationslösning. Olika val av numeriska metoder diskuteras. Flera olika k-värden har funnits lösa ekvationen och ett av dem har bestämts noggrannt.

3. Innehåll

4. Nomenklatur:

Storhet	Namn	Enhet
k	Kramsparameter	$-$
a	Accelerationskonstant	s^2
b	Dämpningskonstanten	s
c	Höjd $-$ offset	m
x	Bollenspositionilngsled	m
y	Bollenspositionihöjdled	m
B	Sluttid	s
L	Kurvlängd	m

5. Problemställning:

Höjden $y(x)$ hos en krimskramsboll bestäms av differentialekvationsproblemet

$$a\,y''(x) - b\,y'(x) + k\,y(x) = y(x)\,\cos(x) + c \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

där sluttiden B är 20 sekunder, dämpningskonstanten b är 1 sekund , accelerationskonstanten a är 10 s^2 och höjd-offseten är $c = 5$ meter. k är en dimensionslös kramsparameter.

Bestäm ett värde på k med minst tre decimaler så att bollen vid tiden B har färdats lika långt som den höjd den just då befinner sig på, dvs kurvlängden av kurvan $y(x)$ för $0 < x < B$ blir densamma som $y(B)$. Parametervärdena antas först vara exakta.

Finns det fler värden på k som löser problemet?

((*Om a har en osäkerhet på* $\pm 1\%$, *b har en osäkerhet på* $\pm 2\%$ *och c har en osäkerhet på* ± 0.1 *hur noga kan då k-värdet bestämmas?* - rapporten tar ej med denna deluppgift!))

6. Vald algoritm

Detta problem är en kombination av

- Differentialekvationslösning (högerledet)
- Integralskattning (bågländsberäkningen, dvs vänsterledet)
- Ickelinjär ekvationslösning (få högerledet lika med vänsterledet)

Vi har valt att lösa differentialekvationsprobelemt med Runge-Kuttas metod, integralen med trapetsregeln och ekvationen med sekantmetoden.

Huvudloopen i programmet är sekantmetoden. Vi gissar ett värde på k, beräknar först högerledet mha Runge-Kuttas metod, sedan med hjälp av trapetsregeln och de från högerledet beräknade $y(x)$-värdena beräknar vi vänsterledet. Vi tar sedan skillnaden mellan höger- och vänsterled och kollar om detta blir noll. Om inte får vi iterera vidare med sekantmetoden tills skillnaden blir noll.

7a. Sekantmetoden

Från REF1 fås formlen för sekantetoden:

$$k_{n+1} = k_n - f(k_n) \cdot \frac{k_n - k_{n-1}}{f(k_n) - f(k_{n-1})}$$

där

$$f(k_n) = HL(k_n) - VL(k_n)$$

Man itererar tills $|k_N - k_{N-1}|$ blir mindre än önskad noggrannhet.

Sekantmetoden behöver två startgissningar på k för att kunna starta. Dessa fick vi genom att göra (rätt grova) skattningar höger- och vänsterledet för ett flertal olika värden på k. För alogoritmer, se nedan. Lösningar finns där kurvorna skär varandra. Vi valde startvärdena $k_0 = X$ och $k_1 = Y$, se figur 1.

FIG 1.

7b. Högerledet

För att beräkna värdet av högerledet måste lösningen till differentialekvationen skattas. Det enklaste valet är Matlabs inbyggda `ode45`, REF2. Vi gjorde det först och beräknade högerledets värde för ett antal olika k. Pga svårigheter med att sedan beräkna vänsterledet, se nedan, bytte vi till Runge-Kuttas metod REF3 som har fix steglängd. Vi använde steglängden $h = B/320$.

Både Runge-Kutta och `ode45` kräver att man skriver om differentialekvationen till ett system av första ordningen. Vi inför därför

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

med startvärdet

$$\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \bar{u}'(x) = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ -a\,u_2(x) - b\,u_1(x) + u_1(x)\,\cos(x) + c \end{pmatrix} \hat{=} f(x, \bar{u})$$

Runke-Kuttas metod stegar sedan fram $\bar{u}(x)$ enligt:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, \bar{u}_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h/2, \bar{u}_n + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_n + h/2, \bar{u}_n + k_2/2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, \bar{u}_n + k_3) \\ \bar{u}_{n+1} &= \bar{u}_n + (k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)/6 \\ x_{n+1} &= x_n + h \end{aligned}$$

med $x_n = x_0 + nh$, $x_0 = 0$ och $x_N = B$.

7c. Vänsterledet

Formeln för båglängden av kurvan $y(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$ är

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\; dx$$

REF4.

Det enklaste sättet i Matlab att skatta en integral är med den inbyggda funktionen `quad`. Den kräver dock att man kan skapa en integrand-funktion som kan anropas för valfritt x. Det kan vi inte här. Vi vet inte hur funktionen för $y(x)$ ser ut. Genom att lösa differentialekavtionen i högerledet kan vi dock beräkna värden på $y(x)$ i utvalda punkter x. Först beräknade vi dessa $y(x)$-värden med `ode45` men den rutinen väljer själv adaptivt (dvs varierande) steglängd, vilket gjorde integralberäkningen klurig. Vi bytte därför till differentialekvationslösaren till Runge-Kuttas metod REF3 och integrallösaren till trapetsregeln REF5 eftersom båda använder sig av fix steglängd. Vi använder således samma steglängd i både höger- och vänterledet.

Trapetsregeln skattar L enligt

$$L(h) = h \cdot (\frac{1}{2}g(x_0) + g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_{N-1}) + \frac{1}{2}g(x_N))$$

där

$$g(x_n) = \sqrt{1 + (y'(x_n))^2}$$

Värdet på $y'(x_n)$ får vi från högerledsberäkningen. (Det är värdena i $u_2(x_n)$)

8. Noggrannhetsbedömning

Typiska värden för krimskramsbollar av de vanligaste flimsmaterialen brukar ligga mellan 0.8 och 2.3 (REF6) så vårt värde är högst rimligt.

I de tre metoderna har vi valt ett värde i vardera: avbrottskriteriet till sekantmetoden och steglängden i Runge-Kutta och trapetsregeln. Samtliga val påverkar noggrannheten i resultatet.

Vi valde avbrottskriteriet i sekantmetoden till $0.5 \cdot 10^{-5}$. Detta räcker till tre decimaler med god marginal.

Vi körde först programmet med steglängden $h = B/40$. Sedan halverade vi successivt steglängden tills den inte längre påverkade de intressanta siffrorna i k-värdet. $h = B/320$ räcker.

Säkerhetskontroller:

- Vi kollade att korrektionerna i sekantmetoden avtog som de bör, $t_n/(t_{n-1}t_{n-2}) \to K$, se REF1.
- Vi kollade att ändringarna i k-värdet avtog en faktor 4 när h halverades (vilket skall gälla för trapetsregeln, REF5).
- Vi bytte differentialekvationen till $y'' = k$ och provkörde programmet. Problemet kan då lösas analytiskt och programmet gav rätt svar.

9. Resultat

Då parametrarna antas exakta blir k-värdet 1.234 med tre säkra decimaler. Värdet är rimligt jämfört med de vanligaste typerna av krimskramsbollar.

Enligt grafen i figur 1 syns att det finns fler värden på k som uppfyller ekvationen. Kurvorna skär varandra på flera ställen. Det skulle motsvara att krimskramsbollar av flera olika matrial kan uppfylla villkoren.

((Här skulle också komma resultatet från beräkningarna med störda parametrar.))

********** För P kommer här ett avsnitt om granskning. M måste inte ha det. **********

10. Egen arbetsinsats

Jag har diskuterat ideer och algoritmer med framför allt Al Lihop och Inge Nalls.

All kod utom `dudt.m` är skriven av mig. Med funktionen `dudt.m` fick jag hjälp av H Jälpson.

11. Referenser

1. Pohl, Grunderna i Numeriska Metoder, sid X.
2. Chapman, Programming for Engineers, sid Y.
3. Pohl, Grunderna i Numeriska Metoder, sid Z.
4. BETA, ...
5. Pohl, Grunderna i Numeriska Metoder, sid W.
6. Tabellverk för Krimskramsbollar, ..., sid V.

12. Bilagor: Matlab-program

```
% proj.m = Program for ...
    ...

function up=dudt(t,u);
    ...
```