DN1212, T1, VT2011
NADA
24 januari 2011

Laboration 4 för T1

Numerisk behandling av integraler och begynnelsevärdesproblem.

Denna laboration ger 0.8 bonuspoäng. Sista bonusdatum 16 feb 2011

Efter den här laborationen skall du kunna integrera numeriskt och förstå begreppet nogrannhetsordning. Du skall också känna igen problemtypen begynnelsevärdesproblem för EN ordinär differentialekvation och kunna lösa denna typ av problem med Eulers metod.

Läsanvisningar: **PP kap 5 och 6, MATLABprogram i EXS 6.2a, 7.3**

1. Numerisk integrering - noggrannhetsordning

Följande integral ska beräknas

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{x+2}\,dx$$

A. Gör först följande laborationsförberedande uppgifter a)-d):

a) Rita först en graf över integranden. Uppskatta den sökta integralens värde ur grafen.

b) Beräkna integralens värde analytiskt, dvs exakt.

I nedanstående tabell har ett antal trapetsvärden som approximerar I redan beräknats:

h	$T(h)$	$e_t = T(h) - I$	$\Delta T(h)$	$T_{extr}(h)$	$e_t = T_{extr}(h) - I$
1	x	x	x	$-$	$-$
0.5	x	x	x	x	x
0.25	2.796336	x	x	x	x
0.125	2.797160	x	x	x	x
0.0625	2.797366	x	x	y	x

c) Räkna ut och fyll i de värden som ska stå i x-positionerna samt i y-positionen.
$\sqrt{1.5} = 1.224745$, $\sqrt{2} = 1.414214$, $\sqrt{2.5} = 1.581139$, $\sqrt{3} = 1.732051$

d) Antag att värdet y tas som approximation till I. Ange det uppskattade *trunkeringsfelet*, E_t med den tumregel som anges i PP 5:1B. Ger denna uppskattning en över- eller underskattning av det verkliga felet?

B. Skriv sedan ett MATLABprogram som beräknar integralen numeriskt med trapetsregeln (se PP 5:1A). Undersök hur approximationsfelet (trunkeringsfelet), E_t, beror av steglängden, h, genom att plotta felen som funktion av steglängderna $h = 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$. Använd MATLABs kommando `loglog` för plottarna. Visa hur vi uppskattar metodens noggrannhetsordning, p, med hjälp av denna plot. Vad blir p?

Utöka sedan programmet så att integralen beräknas med trapetsregeln och en extrapolation (se PP 5:1B). Plotta i samma diagram som ovan felet som funktion av h. Vad blir noggrannhetsordningen p nu?

För en metods noggrannhetsordning gäller

$$|e_t| = |I - T(h)| \leq Ch^p.$$

där C är en konstant, $T(h)$ är det numeriskt uträknade integralvärdet (med trapetsregeln eller trapetsregeln och en extrapolation) och I är det exakta värdet.

2. Numerisk integrering - svängningstid

I den här uppgiftsdelen skall du räkna ut svängningtiden för en pendel. En pendels svängningstid T beror av utslagsvinkeln φ_0 enligt formeln:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} I(\varphi_0)$$

där L är pendelns längd, g är tyngdaccelerationen och

$$I(\varphi_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2(\sin\varphi)^2}}, \quad k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$$

Låt $L = 1\ m$ och $g = 9.81\ m/s^2$. Skriv ett program som beräknar svängningstiden T för φ_0-värdena 5,10,....90 grader. För att beräkna integralen $I(\varphi_0)$ används Matlabfunktionen `quadl`. Plotta resultatet, dvs T som funktion av φ_0 i en graf.
En ofta använd approximation av T är svängningstiden för små svängningar:

$$\tilde{T} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Denna approximation är bra för små utslagsvinklar, men relativfelet ökar med ökande utslagsvinkel. Plotta i samma graf som i a) $\tilde{T}$ som som funktion av utslagsvinkeln då $0 \leq \varphi_0 \leq 90$ grader.

3. Begynnelsevärdesproblem - Eulers metod på en differentialekvation

Givet är följande differentialekvation

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t) - 2y, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, 20].$$

I denna deluppgift ska ovanstående differentialekvation lösas numeriskt med *Eulers framåtmetod* (explicit metod). Uppgiften går ut på att undersöka hur trunkeringsfelet avtar med steglängden h, dvs **noggrannheten**

a) Laborationsförberedande uppgift: Lös först differentialekvationen exakt (analytiskt) och redovisa lösningen på papper. Denna lösning betecknas $y(t)$.

b) Laborationsförberedande uppgift: Formulera Eulers metod för den givna differentialekvationen och räkna 3 steg framåt med steget $h = 0.1$, dvs beräkna approximationer till $y(0.1)$, $y(0.2)$ och $y(0.3)$.

c) Dela in tidsintervallet $[0, 20]$ i n ekvidistanta steg h och skriv ett MATLABprogram som beräknar lösningen för $n = 100$, $n = 500$ och $n = 1000$.
i) Plotta i samma graf den exakta lösningen $y(t)$ samt de de tre numeriska lösningarna, $y(t; h)$.
ii) Plotta även i ett loglog-diagram felet vid $t = 20$, $|y(20) - y(20; h)|$, som funktion av h.

Vilken noggrannhetsordning hos Eulers framåtmetod kan utläsas ur diagrammet?

Hur många timmar ungefär har den här laborationen tagit?

En fråga på kursutvärderingen i slutet av kursen kommer att gälla tidsåtgång och laborationsomfång. Tänk redan nu igenom vad som är bra och vad som kan förbättras!