LABORATION 5

Ekvationer, differentialekvationer

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper). Sista dag för bonuspoäng: 4/3 2011.

1. **Skärning mellan ellipser, ickelinjärt ekvationssystem**

   Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av $0.4x^2 + y^2 - xy = 10$ och den ellips med centrum i $(4, 2)$ och halvaxlarna $a = 4$ och $b = 6$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

   $$(x - 4)^2/a^2 + (y - 2)^2/b^2 = 1.$$

   Ellipserna ska ritas[1] och de erhållna skärningspunkterna markeras med en ring. Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm.

2. **Bästa cirkelanpassning, ickelinjär modell**

   Vi vill anpassa en cirkel till punkterna (1.1, 0.7), (1.5, 1.9), (2.2, 3.1), (3.2, 3.0), (4.5, 2.3), (4.8, 1.0), nu med cirkeln skriven på formen $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$. Det leder till ett överbestämt ickelinjärt ekvationssystem. Använd Gauss-Newtons metod för lösningen.
   Skriv i varje iteration ut värdet på det uttryck som minimeras i Gauss-Newtons metod. Rita upp de givna punkterna och den bästa cirkeln.

3. **Differentialekvationer — begynnelsevärdesproblem**

   Givet är differentialekvationsproblemet

   $$y'' + \pi y\, e^{x/3}\,(2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) - y/9 = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1/3.$$

   Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så att differentialekvationen kan skrivas till ett system av två första ordningens ODE. Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6}.
   Rita upp lösningskurvan

4. **Differentialekvationer — randvärdesproblem**

   Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L och med tvärsnittsarean A.

[1] Den sneda ellipsen skrivs bäst i polär form inför uppritningen.

$$-\frac{d}{dx}(k\frac{dT}{dx}) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \tag{1}$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L. Konstanten k är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymnsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att $L = 2$ $[m]$, $k = 2.5$ $[J/(K \cdot m \cdot s]$, $T_0 = 300$ $[K]$, $T_L = 400$ $[K]$ och $Q(x)$ $[J/(s \cdot m^3)]$ är funktionen

$$Q(x) = 300e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \qquad 0 \leq x \leq L$$

Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1$, där $h(n+1) = L$ och approximerar andraderivatan med centraldifferens erhålles

$$\frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{k}Q(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

Diskretiseringen leder till ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \tag{4}$$

där A är en $n \times n$-matris, T är en $n \times 1$-vektor med temperaturvärden i det inre av intervallet och b är en $n \times 1$-vektor som beror av bl a randvärdena T_0 och T_L samt $Q(x_i)$-värdena.

a) Skriv ner matrisen A för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har matrisen A ?

b) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet. Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Matrisen skapar du i Matlab på följande sätt: `e = ones(n,1); A = spdiags([-e 2*e -e], -1:1, n,n);`
Kommandot `spdiags` är ett kommando för att skapa glesa matriser. Gör (`help spdiags`) för mer information.

Med MATLAB-satsen `Afull=full(A)` skrivs matrisen A ut på vanlig form. Gör det för $n = 4$ och jämför med resultatet i uppgift a).

Räkna ut temperaturen T för fallet $N = 249$. Lösningen får du genom att lösa det linjära ekvationssystemet $AT = b$ i Matlab med \. Lösningen T kommer att innehålla temperaturen i alla punkter x_i utom i randpunkterna.
Plotta temperaturen som funktion av x på hela itervallet $0 \leq x \leq L$.

Hur stor är den minimala och maximala temperaturen? (Plocka fram det minsta och största värdet i vektorn T).

Laboration 5 redovisad och helt klar! Datum: ....

Godkänd av: .... Namn:

....