Hemtal 4, H4. Inlämning 1/11-2012

Skriv lösningarna på separata blad, så att det är lätt att separera de två tal som skall rättas och de som ni skall diskutera på lektionen. Kom ihåg försättsblad! Finns att ladda ner på hemsidan.

Uppgift 1

a) Beskriv i ord hur vektorn $\mathbf{x}$ påverkas (geometriskt) genom multiplikation med matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Ledtråd: använd trigonometriska identiteter för att skriva om matrisen på en form ni känner igen.

b) Låt R_θ vara standardmatrisen för rotation. Om en vektor $\mathbf{x}$ i xy-planet multipliceras med R_θ kommer den att rotera med vinkeln θ kring origo. Om man istället multiplicerar vektorn med R_θ^T, vad händer med vektorn då ?

c) Låt $T_1 : R^2 \to R^2$ vara en rotation kring origo med vinkeln θ_1 och låt $T_2 : R^2 \to R^2$ vara en rotation kring origo med vinkeln θ_2. Den totala rotationen ges då av vinkeln $\theta_1+\theta_2$. Visa att standardmatrisen för den totala rotationen, $R_{\theta_1+\theta_2}$, är densamma som $R_{\theta_2}R_{\theta_1}$.

Uppgift 2

a) Ligger vektorn $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$ i värdemängden (range) för följande transformation

$$T : R^3 \to R^3, \quad T(x, y, z) = (x - y, x + y + z, x + 2z)$$

b) Är transformationen i a) en ett-till-ett transformation ? Du måste motivera ditt svar. Det räcker inte med ett ja eller nej svar.

c) Om den linjära transformationen $T : R^n \to R^n$ är en ett-till-ett-transformation och $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ så är $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Visa att detta är sant.

Uppgift 3

Följande matris är given

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Visa att transformationen $T_A : R^4 \to R^4$ är *på* (en. onto) på fyra olika sätt. Eventuella beräkningar kan göras i Matlab men du måste redovisa hur du har tänkt och vad det är du har löst.

Uppgift 4

Antag att $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ är en linjär transformation och att vi vet att $T(1,1,1) = (1,-1,2,0)$, $T(1,1,0) = (1,1,1,-1)$, $T(1,0,0) = (2,1,0,-1)$.

a) Beräkna $T(4,2,0)$.

b) Bestäm $T(a,b,c)$.

c) Bestäm standardmatrisen för T.

Uppgift 5

a) Bevisa att $\mathbf{x}$ är en egenvektor av en $n \times n$ matris A om och endast om underrummet av $\mathbb{R}^n$ som spänns av $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x}$ har dimension 1.

b) Bevisa att om varje vektor i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som en unik linjär kombination av vektorerna i $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, så är S en bas för $\mathbb{R}^n$. Tips: Använd antagandet om unikhet för att bevisa linjärt oberoende.

Uppgift 6

Bestäm null(A), row(A) och col(A) för nedanstående matriser. Vad är rank(A)? Verifiera dimensionsteoremet (Sats 7.4.1). I *a*) – *c*), utför beräkningarna för hand, i *d*) – *e*) använd Matlab.

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$d)\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad e)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$