Hemtal 5, H5. Inlämning 16/11-2012

Skriv lösningarna på separata blad, så att det är lätt att separera de två tal som skall rättas och de som ni skall diskutera på lektionen. Kom ihåg försättsblad! Finns att ladda ner på hemsidan.

Uppgift 1

a) Konstruera en matris A vars nollrum innehåller alla linjärkombinationer av vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, där

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Använd Gramm-Schmidts algorithm för att bestämma en ortogonal bas för null(A) och row(A).

c) Beräkna projektionen av $\mathbf{x}$ på radrummet respektive nollrummet av A, där $\mathbf{x} = (2, 0, 0, 3, 0)^T$.

Uppgift 2

Följande data är uppmätt och beskriver antalet bakterier i en bakteriodling under ett antal dagar

Dag	0	4	8	12	16	20
Antal$\times 10^6$	67	84	98	125	149	185

a) Anpassa ovanstående data med hjälp av minsta kvadratmetoden till den linjära modellen $y = a_1 + b_1 x$. Skriv upp ekvationssystemet på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Ställ upp normalekvationen och lös dem med hjälp av Matlab. Vad blir a_1 respektive b_1.

c) Beräkna minsta kvadratfelet för modellen ovan.

d) Hur många bakterier finns det uppskattningsvis dag 40 ?

e) Gör som i a)-d) men för den kvadratiska modellen, $y = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$ istället. Är anpassningen bättre eller sämre ? Motivera ditt svar.

Frivillig uppgift: Använd Matlab för att plotta mätdata (som ringar) samt den anpassade modellen i samma figur.

Tips: Gör så här i Matlab efter du har beräknat a_1, a_2, b_1, b_2 samt c_2

```
>> dag=[0 4 8 12 16 20];
>> antal=[67 84 98 125 149 185];
>> dagar=[0:1:40];
>> antal_lin=a1*ones(size(dagar))+b1*dagar;
>> antal_kv=a2*ones(size(dagar))+b2*dagar+c2*dagar.^2;
>> plot(dag,antal,'o',dagar,antal_lin,'r',dagar,antal_kv,'--k')
```

Uppgift 3

a) Bestäm Q och R i QR-faktoriseringen av följande matriser

$$i)\quad A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\qquad ii)\quad A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -4\end{bmatrix}$$

b) Lös systemet i Uppgift 2 a) med hjälp av QR-faktorisering. Du kan använda Matlab i denna uppgift. Vad blir a_1 respektive b_1.

Uppgift 4

a) För nedanstående matriser, avgör om A är diagonaliserbar. Om så är fallet, beräkna en matris P som diagonaliserar A, och bestäm $P^{-1}AP$. Utför beräkningarna för hand i $i) - ii)$.

$$i)\, A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -3 & -5 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix},\quad ii)\, A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

I $iii) - iv)$ använd Matlab för att räkna ut egenvärdena. Kommandot `rref` kan sedan användas som hjälp för att räkna ut egenvektorer.

$$iii)\, A=\begin{bmatrix}11 & -6 & 4 & -10 & -4\\ -3 & 5 & -2 & 4 & 1\\ -8 & 12 & -3 & 12 & 4\\ 1 & 6 & -2 & 3 & -1\\ 8 & -18 & 8 & -14 & -1\end{bmatrix},\quad iv)\, A=\begin{bmatrix}4 & 4 & 2 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2\\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4\\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6\\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3\end{bmatrix}.$$

b) För matriserna i $iii) - iv)$, räkna även ut egenvektorerna med `eig`. För varje egenrum, uttryck de egenvektorer som Matlab räknat fram som linjärkombinationer av de egenvektorer som du räknat fram ovan. Ange koefficienterna med 8 decimaler.

Uppgift 5

Bevisa följande påståenden:

a) Om $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ är en ortonormal bas för $\mathbb{R}^n$, och om A kan utryckas som

$$A = c_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + c_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + c_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T,$$

så är A en symmetrisk matris med egenvärden $c_1, c_2, \dots, c_n$.

b) Om A är en matris som inte är kvadratisk, så är antingen radvektorerna i A eller kolonnvektorerna i A linjärt beroende.

Uppgift 6

För nedanstående matriser, bestäm en ortogonal matris P som diagonaliserar A , och ge $D = P^T AP$.

$$i)\, A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad ii)\, A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$