KTH Engineering Sciences

Optimering, exempel *

Exempel 1 (optimering över kompakt mängd)

Bestäm största och minsta värdet till funktionen $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x^2 + 16$ i cirkelskivan $\{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Lösning: Cirkelskivan är kompakt så detta är ett optimeringsproblem över en kompakt mängd. Vi följer arbetsrutinens tre steg:

1. Hitta alla stationära punkter i det inre av mängden.

   Dessa ges av $\nabla f(x, y) = 0$, dvs

   $$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x^3 + 8x^2 = 4x(x^2 + 2) = 0, && \Rightarrow x = 0, \\ f_y(x, y) &= 4y^3 = 0, && \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

   Funktionens enda stationära punkt är alltså origo. Den ligger också i det inre av mängden.

2. Bestäm funktionens största och minsta värde på randen av mängden.

   Randen beskrivs av $x^2 + y^2 = 4$. Vi parameteriserar randen med x-variabeln, dvs

   $$y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \qquad |x| \leq 2,$$

   där plustecknet motsvarar övre halvan av cirkeln och minustecknet den undre halvan. Låt $g(x)$ vara funktionens värde på randen, dvs

   $$g(x) = f(x, \pm\sqrt{4 - x^2}) = x^4 + (4 - x^2)^2 + 4x^2 + 16 = 2x^4 - 4x^2 + 32.$$

   Vi noterar att g inte beror på valet av tecken, eftersom f antar samma värde för y som för $-y$. Största/minsta värdet på randen är därför största/minsta värdet av $g(x)$ i intervallet $-2 \leq x \leq 2$. Detta är ett optimeringsproblem i en variabel, som man löser genom att derivera $g(x)$ och undersöka värdet i dess stationära punkter samt på randen. Vi har:

   $$g'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1).$$

   De stationära punkterna $g'(x) = 0$ är alltså $x = -1, 0, 1$. Vi får följande tabell:

x	-2		-1		0		1		2
$g'(x)$	-	-	0	+	0	-	0	+	+
$g(x)$	48	$\searrow$	30	$\nearrow$	32	$\searrow$	30	$\nearrow$	48

*Exemplen och delar av lösningarna tagna från "Funktioner av flera variabler" av Leo Ullemar.

Detta visar att största värdet på randen är 48, som antas för $x = \pm 2$, och minsta värdet är 30, som antas för $x = \pm 1$.

3. Välj ut största och minsta värdet av f evaluerad i de stationära punkterna och dess största och minsta värde på randen.

   I vårt fall betyder det att vi ska välja ut största och minsta värdet av $f(0,0)$, 48 och 30. Eftersom $f(0,0) = 16$ blir svaret därför att största värdet är 48 och minsta värdet är 16.

Alternativ: I punkt 2 kan vi även tänka oss att introducera polära koordinater. Det motsvarar att parameterisera randen med vinkeln θ istället för med x. Randen ges då av

$$x = 2\cos\theta,$$
$$y = 2\sin\theta,$$

med $0 \le \theta \le 2\pi$. Som tidigare låter vi g vara funktionens värde på randen. Den blir nu en funktion av θ,

$$g(\theta) = f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 16(\cos^4\theta + \sin^4\theta + \cos^2\theta + 1).$$

Största och minsta värde på randen är givet av största och minsta värde av $g(\theta)$ för $0 \le \theta \le 2\pi$. Som ovan hittar vi dessa genom att derivera $g(\theta)$ och betrakta dess värden i de stationära punkterna samt på randen. Vi har:

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 16(-4\sin\theta\cos^3\theta + 4\cos\theta\sin^3\theta - 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= -32\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta + 1) \\ &= -16\sin(2\theta)(2\cos(2\theta) + 1). \end{aligned}$$

Vi vet att $\sin(2\theta) = 0$ när $2\theta = n\pi$ för alla heltal n, dvs $\theta = n\pi/2$. För $0 \le \theta \le 2\pi$ är därför $\sin(2\theta) = 0$ när $\theta = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ och 2π. Dessa är således stationära punkter till g. Vidare vet vi att $\cos(2\theta) = -1/2$ när $2\theta = \pm 2\pi/3 + n2\pi$ för alla heltal n, dvs $\theta = \pm\pi/3 + n\pi$. För $0 \le \theta \le 2\pi$ är därför $\cos(2\theta) = -1/2$ när $\theta = \pi/3$, $2\pi/3$, $4\pi/3$ och $5\pi/3$. Dessa är således också stationära punkter till g.

Vi får tabellen:

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$		$2\pi/3$		π		$4\pi/3$		$3\pi/2$		$5\pi/3$		2π
$g'(\theta)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$g(\theta)$	48	$\searrow$	30	$\nearrow$	32	$\searrow$	30	$\nearrow$	48	$\searrow$	30	$\nearrow$	32	$\searrow$	30	$\nearrow$	48

Detta visar som tidigare att största värdet på randen är 48, som antas för $\theta = 0$, π, 2π, och minsta värdet är 30, som antas för $\theta = \pi/3$, $2\pi/3$, $4\pi/3$ och $5\pi/3$.

Exempel 2 (optimering över icke-kompakt mängd)

Bestäm största och minsta värdet till funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy}{1 + y^2},$$

i bandet $0 \le x \le 1$.

Lösning: Mängden är i detta fall obegränsad (innehåller godtyckligt stora värden på y) dvs inte kompakt. Vi kan hantera det på flera olika sätt. Här visar vi två alternativ.

Alternativ 1: Vi återför problemet på en kompakt mängd genom att visa att största och minsta värdet inte kan antas för stora y. Vi har att, för $0 \leq x \leq 1$,

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2 + |x||y|}{1+y^2} \leq \frac{1+|y|}{1+y^2} = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{1+1/|y|}{1+1/y^2}.$$

Detta går mot noll när $y \to \pm\infty$, dvs för $0 \leq x \leq 1$,

$$\lim_{|y|\to\infty} f(x,y) = 0.$$

Definitionen av gränsvärde säger oss då att för alla värden $\varepsilon > 0$ kan vi hitta ett η så att $|f(x,y)| < \varepsilon$ för alla $|y| > \eta$. Vi noterar också att

$$f(1,0) = 1, \qquad f(1,-2) = -0.2.$$

Vi väljer nu tex $\varepsilon = 0.1$. Det finns då ett η så att $-0.1 \leq f(x,y) \leq 0.1$ för alla $|y| > \eta$. Men vi har då alltså funnit exempel på funktionsvärden som är strikt större än och strikt mindre än samtliga värden som funktionen antar när $|y| > \eta$. Vi konstaterar att funktionsn största och minsta värde måste ligga i det kompakta området $0 \leq x \leq 1$ och $-\eta \leq y \leq \eta$.

Detta problem löses sedan på vanligt sätt för kompakta områden, dvs 1) hitta alla stationära punkter i det inre, 2) hitta största/minsta värde på randen och 3) välj ut största/minsta värdet av f evaluerad i de stationära punkterna och på randen.

Alternativ 2: Vi återför problemet på ett optimeringsproblem i en variabel genom att först optimera i x för fixt y. För enkelhetens skull söker vi här bara minsta värdet. Definiera

$$h(y) = \min_{0\leq x\leq 1} f(x,y). \tag{1}$$

Detta är ett minimeringsproblem i en variabel, för varje fixt y. Det minsta värdet av hela f ges sedan genom att minimera h som funktion av y.

För att beräkna h i (1) behöver vi derivera f i x-led och hitta dess stationära punkter i det inre av intervallet $[0,1]$. Det ger

$$f'_x(x,y) = \frac{2x+y}{1+y^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -y/2.$$

Denna punkt ligger i det inre av intervallet endast när $-2 < y < 0$. Den ger då

$$f(-y/2, y) = \frac{-y^2}{4(1+y^2)}.$$

Vi måste också betrakta funktionens värde i randpunkterna $x = 0$ och $x = 1$,

$$f(0,y) = 0, \qquad f(1,y) = \frac{1+y}{1+y^2}.$$

Detta ger oss tre olika fall:

Fall 1: $y \leq -2$. Vi har ingen stationär punkt i det inre. Minsta värdet är det minsta av värdena på randen, dvs

$$h(y) = \min\left(0, \frac{1+y}{1+y^2}\right) = \frac{1+y}{1+y^2},$$

eftersom $y \leq -2$.

Fall 2: $-2 < y < 0$. Vi har en inre stationär punkt $x = -y/2$. Vi får tabellen

x	0		$-y/2$		1
$f'_x(x,y)$	$\frac{y}{1+y^2} < 0$	$-$	0	$+$	$\frac{2+y}{1+y^2} > 0$
$f(x,y)$	0	$\searrow$	$\frac{-y^2}{4(1+y^2)}$	$\nearrow$	$\frac{1+y}{1+y^2}$

Minsta värdet är därför

$$h(y) = \frac{-y^2}{4(1+y^2)}.$$

Fall 3: $y \geq 0$. Vi har ingen stationär punkt i det inre. Minsta värdet är det minsta av värdena på randen, dvs

$$h(y) = \min\left(0, \frac{1+y}{1+y^2}\right) = 0,$$

eftersom $y \geq 0$.

Sammanfattningsvis är

$$h(y) = \begin{cases} \frac{1+y}{1+y^2}, & y \leq -2, \\ \frac{-y^2}{4(1+y^2)}, & -2 < y < 0, \\ 0, & y \geq 0. \end{cases}$$

Detta är en kontinuerligt deriverbar funktion (undersök detta!) av en variabel som kan minimeras på vanligt sätt genom att hitta stationära punkter och betraka beteendendet när $y \to \pm\infty$.

Exempel 3 (optimering med bivillkor)

Bestäm största och minsta värdet till funktionen $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x^2 + 16$ på randen till cirkelskivan $\{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Lösning: Här visar vi alltså ytterligare ett alternativ för att hitta största/minsta värdet på randen i Exempel 1 ovan. Vi betraktar problemet som ett optimeringsproblem för f över hela planet $D = \mathbb{R}^2$ med bivillkoret att

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Enligt Lagranges multiplikatormetod måste minst ett av systemen

$$\text{(A)} \begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0, \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} g'_x(x,y) = 0, \\ g'_y(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

vara uppfyllt i de inre extrempunkterna till problemet. Vi beräknar först de partiella derivatorna för f och g,

$$f'_x(x,y) = 4x(x^2+2), \quad f'_y(x,y) = 4y^3, \quad g'_x(x,y) = 2x, \quad g'_y(x,y) = 2y.$$

Systemen blir i vårt fall

$$\text{(A)} \begin{cases} 2x(2x^2 + 4 + \lambda) = 0, \\ 2y(2y^2 + \lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0, \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Det är lätt att se att system B saknar lösning. (De första två ekvationerna ger att $x = y = 0$, vilket inte satisfierar den sista ekvationen.) Vi löser istället system A. Från första ekvationen får vi att antingen är $x = 0$ eller $2x^2 + 4 + \lambda = 0$. Andra ekvationen ger på samma sätt att antingen är $y = 0$ eller $2y^2 + \lambda = 0$. Det ger oss fyra möjliga fall:

Fall 1: $x = y = 0$.
Omöjligt av samma anledning som för system B; sista ekvationen satisfieras ej.

Fall 2: $2x^2 + 4 + \lambda = 0$ och $y = 0$.
Sätter vi in $y = 0$ i sista ekvationen får vi $x = \pm 2$. Då ger $2x^2 + 4 + \lambda = 0$ att $\lambda = -12$. Vi har en lösning till systemet $(x, y, \lambda) = (\pm 2, 0, -12)$.

Fall 3: $x = 0$ och $2y^2 + \lambda = 0$.
Sätter vi in $x = 0$ i sista ekvationen får vi $y = \pm 2$. Då ger $2y^2 + \lambda = 0$ att $\lambda = -8$. Vi har en lösning till systemet $(x, y, \lambda) = (0, \pm 2, -8)$.

Fall 4: $2x^2 + 4 + \lambda = 0$ och $2y^2 + \lambda = 0$.
Vi subtraherar dessa villkor från varandra och dividerar med två. Det ger

$$x^2 - y^2 + 2 = 0,$$

dvs $y^2 = x^2 + 2$. Sätter vi in detta i sista ekvationen får vi $2x^2 - 2 = 0$, och vi får att $x = \pm 1$. Det ger sedan $y = \pm\sqrt{x^2 + 2} = \pm\sqrt{3}$ och $\lambda = -2y^2 = -6$. Vi har en lösning till systemet $(x, y, \lambda) = (\pm 1, \pm\sqrt{3}, -6)$.

De möjliga extrempunkterna är alltså:

$$(\pm 2, 0, -12), \qquad (0, \pm 2, -8), \qquad (\pm 1, \pm\sqrt{3}, -6).$$

Evaluerar vi f i punkterna[1] får vi

$$\begin{aligned} f(\pm 2, 0) &= 2^4 + 4 \cdot 2^2 + 16 = 48, \\ f(0, \pm 2) &= 2^4 + 16 = 32, \\ f(\pm 1, \pm\sqrt{3}) &= 1 + 3^2 + 4 + 16 = 30. \end{aligned}$$

Eftersom randen är en kompakt mängd (och alla randpunkter ligger i det inre av $D = \mathbb{R}^2$) kommer funktionens största och minsta värde återfinnas bland ovanstående tal. Svaret blir alltså som tidigare att största värdet är 48 och minsta är 30.

[1] Notera att Lagrangemultiplikatorn λ inte bidrar.