

DN12- 12, 14, 15, 40, 41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk

Lördagen den 22 augusti 2009, kl. 9.00 - 12.00

DEL 2, 50p Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

(12p)

1. Ekvationerna

$$\begin{cases} 100x + \sin(100y) = 3xy - 100 \\ \cos(xy) + 100y - 100 = 0 \end{cases}$$

vill man lösa med hjälp av Newtons metod och startvärdena $x = -1$ samt $y = 1$.

a) Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för ekvationsproblemet så att det kan lösas.

b) Undersök om startvärdena fungerar eller om nya måste väljas. Motivera noga varför de givna OCH även eventuellt ditt val av startvärden fungerar/inte fungerar.

c) Ställ upp beräkningar med siffervärden för den första iterationen (du behöver inte räkna ut resultaten).

d) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program, som löser ekvationsproblemet. Felet ska vara mindre än 10^{-4} i varje komponent av lösningen. I varje beräkningssteg ska lösningens komponenter skrivas ut.

(16p)

2. Man vill lösa följande differentialekvationssystem

$$\begin{cases} y' = \frac{\sin(\pi x) + z}{y^2 + z^2} \\ z' = \frac{\cos(y)}{y^2 + z^2} \end{cases}$$

med tillhörande villkor $y(x_0) = 1$ och $z(x_0) = 2$ där $x_0 = 0$.a) Skissera en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program, som löser ODE:n. ODE:n ska lösas med Matlabfunktionen ode45 på intervallet $0 \leq x \leq 10$. Lösningsskurvorna för $y(x)$ och $z(x)$ ska plottas för $0 \leq x \leq 10$ och $y(10)$ respektive $z(10)$ ska skrivas ut. Typ av anropssats för ode45:

$$[tout, uout] = \text{ode45}('rhs', [t0, tslut], u0)$$

(I stället för 'rhs' kan man använda @rhs)

b) Utöka programmet och beräkna $I = \int_{x_{limit}}^{10} \sqrt{1 + (y')^2} dx$. Observera integrationsgränserna! x_{limit} är det minsta värdet på x där $y(x) > z(x)$ gäller i intervallet $0 \leq x \leq 10$.*Var god vänd sida!*

(10p)

3. Trapetsregeln har vid beräkningar gett resultaten $T(h)$ och $T(2h)$. Med hjälp av feltermsskorrektion kan ett bättre värde beräknas med

$$\hat{T}(h) = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{3}$$

så kallad Richardsonextrapolation.

a) Härled formeln för $\hat{T}(h)$ ovan.

b) Visa vilken noggrannhetsordning som gäller för $\hat{T}(h)$.

(12p)

4. Följande mätpunkter har erhållits

x	2	4	6
y	6	10	-18

a) Interpolera ett polynom till dessa punkter.

b) En ny punkt $(1, 7)$ läggs till de övriga. Interpolera ett polynom till dessa 4 punkter.

c) Om den nya punktens y -värde störs med ± 0.5 , hur mycket påverkas då polynomets koefficienter? Interpolation genom de 4 punkterna avses.

Lycka till!