KTH Computer Science and Communication

Tentamen, del 1 – Lösningar
DN1240 – Numeriska metoder gk II
F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

DEL 1: 20 poäng. Inga hjälpmedel. Betygsgräns för betyg E: 14 poäng (inkl. bonuspoäng).

1a. Ekvationen $x = 1 - 0.2e^{3x}$ ska lösas med Newtons metod. Utför en iteration med startapproximationen $x_0 = 0$. **(2 p)**

Lösning: Newtons metod appliceras på $f(x) = 0$ där

$$f(x) = 1 - 0.2e^{3x} - x, \qquad f'(x) = -0.6e^{3x} - 1.$$

Vi får

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = -f(0)/f'(0) = -(1 - 0.2)/(-0.6 - 1) = 0.8/1.6 = 1/2.$$

$$\boxed{\text{Svar: } 1/2}$$

b. Villkoret för att fixpunktsiteration för samma ekvation som i del a, vars rot $= \alpha$ (och samma startapproximation) med iterationsformeln $x_{n+1} = 1 - 0.2e^{3x_n}$ ska konvergera lyder **(2 p)**

Lösning: Villkor för konvergens är $|\phi'(\alpha)| < 1$ där $\phi(x)$ är fixpunktfunktionen

$$\phi(x) = 1 - 0.2e^{3x}, \quad \phi'(x) = -0.6e^{3x}.$$

Detta ger

$$\boxed{\text{Svar: } \left|0.6e^{3\alpha}\right| < 1.}$$

2. En metod för numerisk integration har noggrannhetsordning p. Detta betyder att: **(2 p)**

$$\boxed{\text{Svar: trunkeringsfelet är proportionellt mot steglängden upphöjt till } p}$$

3. För att anpassa en linje till punkterna

$x =$	1	3	4	5	11	13
$y =$	2	2.2	2.5	3	4.4	5.2

används minstakvadratmetoden. Detta leder till ett överbestämt ekvationssystem $Ax \approx b$.

Vilken dimension har matrisen A? **(1p)**

Lösning: Systemt blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 11 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 2.2 \\ 2.5 \\ 3 \\ 4.4 \\ 5.2 \end{pmatrix}$$

Dvs,

$$\boxed{\text{Svar: 6 rader, 2 kolumner}}$$

Hur många ekvationer har normalekvationerna? **(1p)**

Lösning: Normalekvationerna är

$$A^T Ax = A^T b.$$

Eftersom $A^T A$ är en 2×2-matris får vi

$$\boxed{\text{Svar: 2 st}}$$

4a. Om lösning av ett fullt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär lösning av systemet med tusen obekanta? **(2 p)**

Lösning: Komplexiteten att lösa ett fullt system är $O(n^3)$. Därför får vi

$$\text{tid} \approx cn^3 \quad \Rightarrow \quad 0.1 \approx c50^3 \quad c \approx 0.1 \times 50^{-3}.$$

Utnyttja detta för att uppskatta tidsåtgången för det stora systemet

$$\text{tid stort system} \approx c1000^3 \approx 0.1(1000/50)^3 = 0.1 \times 20^3 = 800.$$

$$\boxed{\text{Svar: 800 s}}$$

b. Om lösning av ett tridiagonalt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär en effektiv lösning av systemet med tusen obekanta? **(2 p)**

Lösning: Komplexiteten att lösa ett tridiagonalt system med en effektiv metod är $O(n)$. Därför får vi

$$\text{tid} \approx cn \quad \Rightarrow \quad 0.1 \approx c50 \quad c \approx 0.1 \times 50^{-1}.$$

Utnyttja detta för att uppskatta tidsåtgången för det stora systemet

$$\text{tid stort system} \approx c1000 \approx 0.1(1000/50) = 0.1 \times 20 = 2.$$

$$\boxed{\text{Svar: 2 s}}$$

5. Differentialekvationen $y' = y^2 + \cos(\pi x)$, $y(1) = 1/2$, löses med Eulers metod och steglängden $h = 0.2$. Vad blir y-värdet vid $y(1.2)$? **(2 p)**

Lösning: Ett steg i Eulers metod lyder

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Här har vi

$$x_0 = 1, \; y_0 = 1/2, \; h = 0.2, \; f(x, y) = y^2 + \cos(\pi x).$$

Därför får vi

$$y_1 = \frac{1}{2} + 0.2\left(\frac{1}{2^2} + \cos(\pi 1)\right) = \frac{1}{2} + 0.2\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 0.35.$$

$\boxed{\text{Svar: } 0.35}$

6. För en iterativ metod uppskattas felen e_n i iterationerna till

$$e_7 = 0.2477, \quad e_8 = 0.049, \quad e_9 = 0.0104, \quad e_{10} = 0.00198$$

Vilken konvergensordning motsvarar detta? **(2 p)**

Lösning: Konvergensordning p innebär att $e_{n+1} \approx c e_n^p$ för något värde c. Här har vi

$$e_8/e_7 \approx e_9/e_8 \approx e_{10}/e_9 \approx 1/5 \quad \Rightarrow \quad \text{linjär (första ordnings) konvergens}$$

$\boxed{\text{Svar: } 1}$

7. Styckvis linjär interpolation har noggrannhetsordning **(1 p)**

$\boxed{\text{Svar: } 2}$

8. Värdet av $\int_0^\pi (\cos(\frac{x}{2}))^{\sin 2x}\, dx$ beräknas med trapetsregeln och steglängden $h = \pi/2$. **(2 p)**

Lösning: Funktionsvärdena vi behöver är

$$f(0) = 1^0 = 1, \quad f(\pi/2) = \cos(\pi/4)^0 = 1, \quad f(\pi) = 0^0 = 1.$$

Trapestregeln med $h = \pi/2$ blir

$$\int_0^\pi \left(\cos(\frac{x}{2})\right)^{\sin 2x} dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(0) + f(\pi/2) + \frac{1}{2}f(\pi)\right) = \frac{\pi}{2}(1/2 + 1 + 1/2) = \pi.$$

$\boxed{\text{Svar: } \pi}$

9. Vi vill beräkna $y = \sin(x)$ när x är behäftat med ett relativfel $r_x \ll 1$. Vad kan vi säga om relativfelet r_y i y (när x och y inte ligger nära noll)? **(1 p)**

Lösning: Låt absolutfelet i x och y vara e_x respektive e_y. Då ger felfortplantingsformeln (Taylorutveckling):

$$e_y \approx e_x y'(x) \quad \Rightarrow \quad r_y = \frac{e_y}{y} \approx \frac{e_x}{x}\frac{x}{y}y'(x) = r_x \frac{x}{y}y'(x).$$

Här är $y'(x) = \cos(x)$,

$$r_y \approx r_x \frac{x}{\sin(x)}\cos(x) = \frac{r_x x}{\tan(x)}.$$

Dvs,

$\boxed{\text{Svar: } r_y \approx \frac{r_x x}{\tan(x)}.}$