KTH Computer Science
and Communication

Tentamen, del 2
DN1240 – Numeriska metoder gk II
F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

DEL 2: Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

1. Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som använder Newtons metod för att lösa det olinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \ln(x) + \sin(y) - 1/2 &= 0, \\ \frac{x}{z^2} - \exp(-2x) - 1 &= 0, \\ \sin(x+y) - \cos(z) &= 0, \end{aligned}$$

med ett fel i varje komponent av lösningen som är mindre än 10^{-10}. Använd startgissningen $x = y = z = 1$. **(12 p)**

2. Givet funktionen $y(x)$.

(a) Bestäm ett tredjegradspolynom som interpolerar $y(x)$ i punkterna $x = 0, 1, 2, 3$. Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur polynomet är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

(b) Bestäm en (styckvis polynom-) funktion $S(x)$ med egenskapen

i. $S(x)$ interpolerar $y(x)$ i punkterna $x = 0, 1, 2, 3$,
ii. $S(x)$ är ett förstagradspolynom i intervallet $[0, 1]$,
iii. $S(x)$ är ett tredjegradspolynom i intervallet $[1, 2]$,
iv. $S(x)$ är ett förstagradspolynom i intervallet $[2, 3]$,
v. $S'(x)$ kontinuerlig på hela intervallet $[0, 3]$.

Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur $S(x)$ är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

3. En variant av Van der Pol-generatorn beskrivs av den ordinära differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \sin(x) = 0.$$

(a) Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som beräknar lösningen x vid $t = 5$ för begynnelsedata $x(0) = 1$ och $x'(0) = 0$. Algoritmen ska vara baserad på Framåt Euler-metoden med steglängden $h = 0.01$. **(10 p)**

(b) Modifiera din algoritm så att den istället använder den implicita Bakåt Euler-metoden,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

Nya element kan behöva introduceras i algoritmen. **(6 p)**

4. Formulera finita differensmetoden för randvärdesproblemet

$$u_{xx} + xu_x - \sin(x)u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 2.$$

Visa hur metoden leder till ett linjärt ekvationssystem $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$. Specificera elementen i A-matrisen och högerledet $\boldsymbol{b}$. Var noga med att definiera alla variabler du använder och förklara innebörden av elementen i lösningsvektorn $\boldsymbol{u}$. (Inga räkningar behöver genomföras dock.) **(12 p)**