KTH Engineering Sciences

# Tentamen, del 2
# DN1240 – Numeriska metoder gk II för F

**Fredag 14 december 2012 kl 14–17**

**DEL 2:** Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

**1.** Man vill lösa ekvationssystemet

$$x + y + \sin(y) - 1.1 = 0,$$
$$xy^2 + y + e^y - x = 0,$$

med Newtons metod.

(a) Inför beteckningar och formulera Newtons metod för detta ekvationssystem. **(3 p)**

(b) Vi antar att du känner till att det finns en rot där $y$ är mycket liten (t.ex. via fysikaliska resonemang). Hitta en bra startgissning genom att linjärisera ekvationerna runt $y = 0$ och lösa detta förenklade problem. **(3 p)**

(c) Beskriv detaljerat en algoritm (baserad på Newtons metod) i form av ett Matlab-program som bestämmer roten med ett fel mindre än $10^{-6}$ i både $x$ och $y$. **(6 p)**

**2.** Randvärdesproblemet

$$u_{xx} + u_x - \cos^2(x/2)u = 1, \qquad u(0) = 0, \quad u(2\pi) = 2,$$

ska lösas med finita differensmetoden där derivatorna approximeras med centraldifferenser. Metoden leder till ett linjärt ekvationssystem $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ med $n$ obekanta.

(a) Inför lämpliga beteckningar och förklara innebörden av elementen i lösningsvektorn $\boldsymbol{u}$. Var noga med att definiera alla variabler du använder. **(2 p)**

(b) Noggrannhetsordningen för metoden är två. Förklara med hjälp av dina definierade variabler precis vad detta innebär. **(2 p)**

(c) Härled uttryck för alla element i $A$-matrisen och i högerledet $\boldsymbol{b}$. (Inget ekvationssystem behöver dock lösas.) **(6 p)**

(d) Antag att vi istället vill hitta en $2\pi$-periodisk funktion som uppfyller differentialekvationen. Det betyder att Dirichlet-randvillkoren nu ersätts med periodiska randvillkor:

$$u(x) = u(x + 2\pi), \qquad \forall x.$$

Föreslå en modifikation av metoden ovan för detta fall.
Hur ändrar sig $A$ och $\boldsymbol{b}$? **(5 p)**

**3.** För att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(0) = y_0,$$

föreslår någon metoden

$$u_{n+1} = u_n + h[\alpha f(t_n, u_n) + \beta f(t_{n-1}, u_{n-1})], \qquad u_0 = y_0,$$

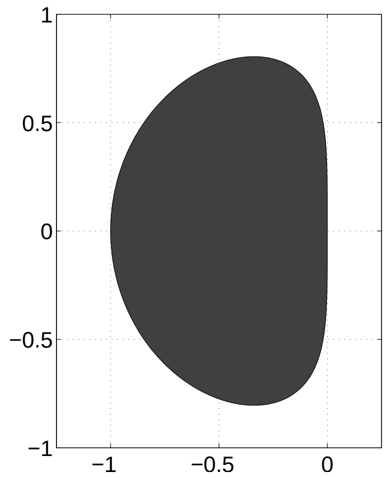
där $h$ är en konstant steglängd och $\alpha, \beta$ är två reella koefficienter, oberoende av $h$.

(a) Bestäm $\alpha, \beta$ så att det lokala trunkationsfelet blir så litet som möjligt (i termer av $h$). Vad blir metodens noggrannhetsordning (för globala felet) med detta val av koefficienter? **(6 p)**

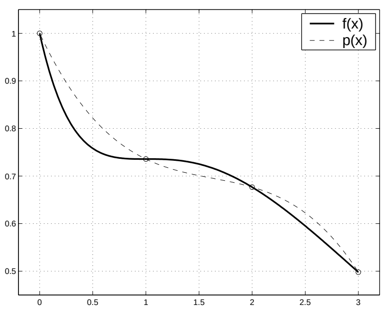
(b) Stabilitetsområdet för metoden i a) ges i figuren intill. Bestäm för vilka steglängder $h$ som metoden är absolutstabil när

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

**(3 p)**



**4.** (a) Låt $p(x)$ vara det tredjegradspolynom som interpolerar $f(x) = \exp(-x)(1+x^2)$ i punkterna $x = 0, 1, 2, 3$ (se figur). Skriv en detaljerad algoritm i Matlab som först bestämmer polynomet (utan att använda `polyfit`-funktionen) och sedan med god noggrannhet räknar ut skillnaden i båglängden på kurvorna $f(x)$ och $p(x)$ när $0 \le x \le 3$. Hur kan man gå tillväga för att kontrollera tillförlitligheten i resultatet? **(8 p)**




*Tips:* Båglängden $L$ för en kurva $y(x)$ i intervallet $x \in [a, b]$ ges av integralen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

(b) Låt $q(x)$ vara ett fjärdegradspolynom som interpolerar $f(x)$ i samma punkter som ovan. Strukturera en numerisk metod för att bestämma polynomet så att det också har precis samma båglängd som $f(x)$ när $0 \le x \le 3$. Beskriv vilka matematiska delproblem som behöver lösas och vilka numeriska metoder som är lämpliga. Inför beteckningar och formulera en algoritm. Programkod behövs dock ej. Diskutera hur felen i metoderna bidrar till en felgräns för det som söks. **(6 p)**