DN1212+DN1214+DN1215+DN1240+DN1241+DN1243 mfl
Tentamen i Grundkurs i numeriska metoder
Del 2 (av 2)
Lördag 2012-03-17, kl 9-12

Skrivtid 3 tim. **Inga hjälpmedel.** Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p D, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng från årets laborationer (max 4p).

Var god notera att miniräknare **ej** är tillåten på denna tentamen.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses normalt beskrivning i Matlab.

Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade, tex $c = 0.5 \cdot 0.2^3 \cdot \cos(\pi/3)$ i stället för det uträknade $c = 0.002$

( ) **P0.** Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (linje och termin) där poängen erhållits. Endast poäng från senaste kursomgången är giltiga.

P1. Givet differentialekvationsproblemet

$$y''' = 8x - y^2 \qquad y(1) = 3 \;\; y'(1) = 2 \;\; y''(1) = 1$$

(4) **a)** Skatta $y'(1.5)$ och $y''(2)$ med Eulers metod och steget 0.5.

(4) **b)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att numeriskt skatta värdet av $y(3)$.

(2) **c)** Lägg till satser/detaljer som förklarar hur man ser till att lösningen har minst 2 säkra decimaler.

(2) **d)** Lägg till satser/detaljer som beskriver hur man åstadkommer en plot över $w(x) = y''(x)/y(x)$ som funktion av x över tidsintervallet $1 \le x \le 3$.

P2. I en park finns 5 vackra statyer utplacerade. Man vill anlägga en ellipsformad rullskridskobana i närheten av dessa statyer. Stayerna är placerade vid koordinaterna

x	2	2	4	6	8
y	2	4	1	5	3

Vi skall bestämma ellipsens halvaxlar a och b samt mittpunktskoordinater (x_m, y_m). Som bekant är ellipsen ekvation

$$\left(\frac{x - x_m}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_m}{b}\right)^2 = 1$$

(2) **a)** Föreslå rimliga värden på halvaxlarna och mittpunktskoordinaterna. Glöm inte motivera dina val.

(5) **b)** Antag att trädgårdsmästaren bestämmer att mittpunktskoordinaterna skall vara $(x_m, y_m) = (4, 2)$. Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att bestämma denna ellips halvaxlar a och b med minstakvadratmetoden. Ange vilket ekvationssystem du löser. Är det linjärt eller icke-linjärt?

(6) **c)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att med minstakvadratmetoden bestämma både ellipsens halvaxlar a och b och mittpunktskoordinater (x_m, y_m). (Dvs ignorera trädgårdsmästarens beslut och optimera även mittpunkten.) Ange vilket ekvationssystem du löser. Är det linjärt eller icke-linjärt?

Var god vänd

P3. Man vill bestämma k så att

$$\int_0^4 \frac{100\cos(kx)}{(x+k)}dx = k^2$$

(1) **a)** Problemet angrips genom nedbrytning till enklare numeriska problem. Vilka är de?

(2) **b)** Vilka numeriska metoder är bra att använda för dessa delproblem?

(6) **c)** k-värdet är nära 2. Beskriv med ett Matlab-program eller en detaljerad beskrivning hur man bestämmer k-värdet med cirka 3 decimaler.

P4. Man vill designa en bilprofil i längsled. Bakre kofångaren är vid $x = 0$ och den främre vid $x = 3.9$ (mätdata är givna i meter). Nio punkter längs profilen är givna

x	0.0	0.3	0.6	0.9	1.5	2.4	2.7	3.6	3.9
y	0.2	0.7	0.9	1.6	1.7	1.6	0.7	0.5	0.1

(4) **a)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att genom de 4 punkterna i bakre delen av bilen lägga ETT interpolationspolynom av lämplig grad. Programmet skall också rita upp polynomet och markera mätpunkterna.

(2) **b)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att rita upp den kurva som erhålls med styckvis linjär interpolation i de främre 6 punkterna. Programmet skall också markera mätpunkterna.

(3) **c)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att beräkna på vilken höjd bilens bak- respektive framlyktor hamnar om de ligger vid $x = 0.15$ respektive $x = 3.75$?

P5. Givet differentialekvationssystemet

$$y'' + xy + x = y' \qquad y(2) = 3 \quad y(4.5) = 0.6$$

(5) **a)** Härled det linjära ekvationssystem man får om man använder finita differensmetoden (FDM) med centraldifferenser och delar upp intervallet i 5 delar.

(1) **b)** Vilken storhet i deluppgift a innehåller approximationen av värdet i $y(3)$?

(1) **c)** Om man söker värdet av $y'(2)$, vad är nackdelen med att skatta derivatan med formeln $y'(2) \approx \frac{y(2+h)-y(2)}{h}$ med det h man använt i det linjära systemet för FDM emligt ovan?

Lycka till och gott fortsatt ”nummande”!