 Namn: ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

DN1212,.... DN1243 Tentamen i Numeriska metoder , Lördag 10-10-23

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

1. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x(y-2), \qquad y(0) = 10; \quad y(8) = 3$$

(2p) diskretiseras med steget $h = 1$. Då erhålls ett ekvationssystem. Hur många ekvationer n har detta system om $y(0)$ och $y(8)$ eliminerats med hjälp av randvillkoren? n är . . .

- [ ] 2
- [ ] 3.
- [ ] 5.
- [x] 7.
- [ ] 8.
- [ ] det är omöjligt att säga

2. Använd minstakvadratmetoden för att till givna mätdata

x	101	102	103	104	105
y	-4	0	3	3	5

anpassa modellen

$$P(x) = c_1 + c_2(x-103) + c_3[(x-103)^2 - 2]$$

(3p) Koefficienten c_3 blir

a.

- [ ] -2
- [ ] -1
- [x] -0.5
- [ ] 0
- [ ] 0.5
- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 103

(1p) b.Givet ett överbestämt linjärt ekvationssystem där koefficientmatrisen är en 5×3-matris. Vilket av följande påståenden är **inte** korrekt

- [ ] residualvektorn har 5 komponenter
- [x] residualvektorns Euklidiska norm är alltid noll
- [ ] residualvektorns Euklidiska norm minimeras alltid
- [ ] normalekvationernas koefficientmatris är en 3×3-matris
- [ ] normalekvationerna har tre obekanta
- [ ] det överbestämda ekvationssystemet har fem ekvationer

(1p) **3.** a.Ett steg med Eulers metod med steglängden $h = 0.25$ på

$$\begin{aligned} x' &= 2xy \qquad & x(0) &= 1 \\ y' &= 8t - 2xy \qquad & y(0) &= 4 \end{aligned}$$

ger bl.a. följande resultat (ett alternativ korrekt)

☐ $y(0.25) = 1$	☐ $x(0.25) = 0.75$
☐ $y(0.50) = 3$	☐ $x(0.25) = 1$
☒ $y(0.25) = 2$	☐ $x(0.50) = 2$
☐ $y(1.00) = 3$	☐ $x(1.00) = 103$

(2p) b.Ytterligare ett steg med Euler med samma steglängd ger (ett alternativ korrekt)

☐ $x(0.25) = 1$	☐ $x(0.25) = 0.75$
☒ $x(0.50) = 6$	☐ $x(0.50) = 1$
☐ $x(0.75) = 0.25$	☐ $x(0.50) = 2$
☐ $x(1.00) = 3$	☐ $x(1.00) = 103$

(2p) **4.** En metod för lösning av icke-linjära ekvationer

$$x_{k+1} = x_k + dx_k$$

ger en följd av korrektionstermer dx_k enligt

$$0.4, \quad 0.04, \quad 0.004, \quad 0.0004, \quad 0.00004$$

Detta indikerar att metoden

- ☐ divergerar
- ☒ är linjärt konvergent
- ☐ är bättre än linjärt konvergent
- ☐ är kvadratiskt konvergent
- ☐ är Newtons metod
- ☐ är Runge-Kuttas metod

(2p) **5.** Givet ekvationen

$$x^2 + e^{x-100} = 2500$$

En approximativ lösning är $x = 50$. Gör en iteration med Newtons metod för att skatta felet i denna lösning. $e^{-25} \approx 1.4 \times 10^{-11}$, $e^{-50} \approx 2 \times 10^{-22}$ och $e^{-100} \approx 4 \times 10^{-44}$. Felet är ungefär

☐ 0.5	☐ 2×10^{-28}
☐ 2×10^{-11}	☐ 2×10^{-44}
☐ 2×10^{-22}	☐ 2×10^{-46}
☒ 2×10^{-24}	☐ 4×10^{-88}

6. Givet tabellen

x	101	102	103	104	105
y	-4	0	3	3	5

(1p) a. Det interpolationspolynom som går genom samtliga punkterna i tabellen har gradtalet

- [ ] 2
- [ ] 3
- [x] 4
- [ ] 5

(1p) b. Om vi interpolerar linjärt till $x = 104.3$ så får vi

- [ ] 3.0
- [ ] 3.3
- [x] 3.6
- [ ] 3.9

7. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^3q}{dt^3} + 3\frac{dq}{dt}q^2 = \sin(t)$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir n...

- [ ] det är omöjligt att säga
- [ ] 1.
- [ ] 2.
- [x] 3.
- [ ] 4.

8. En integral $I = \int_0^4 f(x)dx$ har beräknats approximativt med trapetsregeln T(h) med steglängderna $h = 0.1$, $h = 0.05$ och $h = 0.01$. Följande resultat erhölls $T(0.1) = 2.850216$, $T(0.05) = 2.761023$, $T(0.01) = 2.731224$.

(1p) a. Felet i T(0.1) är ungefär

- [ ] det är omöjligt att säga
- [ ] 1
- [x] 0.1
- [ ] 0.01
- [ ] 0.0001

8b. Heuns metod för numerisk lösning av differentialekvationer har noggrannhetsordning 2.
(2p) Detta betyder att ...

- [ ] Felet avtar med antalet steg
- [ ] Antalet korrekta decimaler kvadreras
- [ ] Felet är proportionellt mot steglängden
- [x] Det globala felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat