CSC, NADA, KTH

Lösning till DN1241/43 Numeriska Metoder grundkurser
Lördagen den 23/10 2010 kl 9-12

P1.
```
function f=fp1(z);
xc=z(1); xp=z(2); yp=z(3);
f=[(xp-xc)^2+(yp-2)^2-4
     xp-0.4*yp^2
   2*(xp-xc)+2*(yp-2)/(0.8*yp)];
```

```
z=[8;7;4]; %ur figuren
dznorm=1;
while dznorm > 1.E-6,
    f=fp1(z); J=minjac(@fp1,z);
    dz=-J\f; z=z+dz; dznorm=norm(dz)
end
xc=z(1); yc=2; R=2; fi=0:pi/25:2*pi;
x=xc+R*cos(fi); y=yc+R*sin(fi);
xpar=0:0.1:10; ypar=sqrt(xpar/0.4);
plot(x,y,xpar,ypar,z(2),z(3),'x');
axis equal
```

P2a. Från de tre sista värdena får vi

```
     h       approx.            extrapolerat
--------------------
 2.50e-02    2.0209
 1.25e-02    2.0084  125/3= 42    2.0042
 6.25e-03    2.0053   31/3= 10    2.0043
```

Vilket ger f'(1.2)=2.0043 med felskattning 0.0001 (skillnaden mellan de exrapolerade värdena)

P2b. Vi noterar att

$$D(h) = f'(1.2) + ch^p + \dots$$

Vi utökar tabellen ovan enligt

```
   h     approx. [D(h)-D(h/2)]x10^4      kvot
------------------------------------------
 8H    2.0717
 4H    2.0209     508                   508/125 = ca 4
 2H    2.0084     125                   125/31  = ca 4
  H    2.0053      31
```

Kvoten består av uttrycket

$$\frac{h^p - (h/2)^p}{(h/2)^p - (h/4)^p} = 2^p$$

I vårt fall blir kvoten 4 så p=2.

P3
```
function f=hl(t,y);
f=(1-y^2)*y;
if y<-2, f=6; elseif y>2, f=-6; end

-------------------------------------------------------
ystart=[0.5 5 -0.5 -5]; yslut=[];
hold off
for y0=ystart
  [T,Y]=ode45(@hl,[0 10],y0);
  yslut=[yslut Y(end)];
  plot(T,Y), hold on
end
[yslut(1)-yslut(2) yslut(3)-yslut(4)]
```

P4a. För $h = 1$ får vi följande diskretisering av området

```
0    0.25           1                      2   :t
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
t     t     t     t     t                 t     t
 0     1     2     3     4                 7     8

y     y     y     y     y       osv
 0     1     2     3     4
```

Antalet inre punkter är alltså 7, liksom antalet obekanta. $y_0 = 1$ och $y_8 = 2$.

I differentialekvationen diskretiserar vi dz/dt och d^2z/dt^2 med centraldifferenser och kan ställa upp approximationer i de 7 inre punkterna. Detta ger

$$f_i(\mathbf{y}) = (1 + (\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h})^2)\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i = 0$$

för $i = 1, \ldots, 7$.

Detta är ett icke-linjärt ekvationssystem med 7 ekvationer och 7 obekanta.

P4b.
```
function f=fp4(z);
global zL zR h
y=[zL; z; zR]; N=length(y);
f=(1+(y(3:N)-y(1:N-2)).^2/(2*h)^2).*   ...
    (y(3:N)-2*y(2:N-1)+y(1:N-2))/(h^2)-y(2:N-1);
-------------------------------------------------
global zL zR h

N=19; h=2/(N+1)
zL=1; zR=2;
t=(h:h:2-h)';
z=1+t/2; %en rät linje mellan ändpunkterna

dznorm=1;
while dznorm > 1.E-8,
    f=fp4(z); J=minjac(@fp4,z);
    dz=-J\f; z=z+dz; dznorm=norm(dz)
end
tp=[0;t;2]; zp=[zL; z; zR];
plot(tp,zp)
```

Vi kontrollerar konvergensen i Newton med utskrifterna av dznorm. Värdena skall avta kvadratiskt.

För att uppskatta diskretiseringsfelen löser vi om problemet med N=39 (halverad steglängd) och tittar på skillnaden i gemensamma punkter.