

DN1212,... DN1243 Tentamen i Numeriska metoder , Lördag 10-10-23

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

1. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x(y - 2), \quad y(0) = 10; \quad y(8) = 3$$

(2p) diskretiseras med steget $h = 1$. Då erhålls ett ekvationssystem. Hur många ekvationer n har detta system om $y(0)$ och $y(8)$ eliminerats med hjälp av randvillkoren? n är ...

 2 3. 5. 7. 8. det är omöjligt att säga

2. Använd minstakvadratmetoden för att till givna mätdata

x	101	102	103	104	105
y	-4	0	3	3	5

anpassa modellen

$$P(x) = c_1 + c_2(x - 103) + c_3[(x - 103)^2 - 2]$$

(3p) Koefficienten c_3 blir

a.

 -2 -1 -0.5 0 0.5 1 2 103

(1p) b. Givet ett överbestämt linjärt ekvationssystem där koefficientmatrisen är en 5×3 -matris. Vilket av följande påståenden är **inte** korrekt

 residualvektorn har 5 komponenter residualvektorns Euklidiska norm är alltid noll residualvektorns Euklidiska norm minimeras alltid normalekvationernas koefficientmatris är en 3×3 -matris normalekvationerna har tre obekanta det överbestämde ekvationssystemet har fem ekvationer

- (1p) 3. a. Ett steg med Eulers metod med steglängden $h = 0.25$ på

$$\begin{aligned}x' &= 2xy & x(0) &= 1 \\y' &= 8t - 2xy & y(0) &= 4\end{aligned}$$

ger bl.a. följande resultat (ett alternativ korrekt)

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $y(0.25) = 1$ | <input type="checkbox"/> $x(0.25) = 0.75$ |
| <input type="checkbox"/> $y(0.50) = 3$ | <input type="checkbox"/> $x(0.25) = 1$ |
| <input type="checkbox"/> $y(0.25) = 2$ | <input type="checkbox"/> $x(0.50) = 2$ |
| <input type="checkbox"/> $y(1.00) = 3$ | <input type="checkbox"/> $x(1.00) = 103$ |

- (2p) b. Ytterligare ett steg med Euler med samma steglängd ger (ett alternativ korrekt)

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $x(0.25) = 1$ | <input type="checkbox"/> $x(0.25) = 0.75$ |
| <input type="checkbox"/> $x(0.50) = 6$ | <input type="checkbox"/> $x(0.50) = 1$ |
| <input type="checkbox"/> $x(0.75) = 0.25$ | <input type="checkbox"/> $x(0.50) = 2$ |
| <input type="checkbox"/> $x(1.00) = 3$ | <input type="checkbox"/> $x(1.00) = 103$ |

- (2p) 4. En metod för lösning av icke-linjära ekvationer

$$x_{k+1} = x_k + dx_k$$

ger en följd av korrektionstermer dx_k enligt

$$0.4, \quad 0.04, \quad 0.004, \quad 0.0004, \quad 0.00004$$

Detta indikerar att metoden

- divergerar
- är linjärt konvergent
- är bättre än linjärt konvergent
- är kvadratisk konvergent
- är Newtons metod
- är Runge-Kuttas metod

- (2p) 5. Givet ekvationen

$$x^2 + e^{x-100} = 2500$$

En approximativ lösning är $x = 50$. Gör en iteration med Newtons metod för att skatta felet i denna lösning. $e^{-25} \approx 1.4 \times 10^{-11}$, $e^{-50} \approx 2 \times 10^{-22}$ och $e^{-100} \approx 4 \times 10^{-44}$. Felet är ungefär

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> 0.5 | <input type="checkbox"/> 2×10^{-28} |
| <input type="checkbox"/> 2×10^{-11} | <input type="checkbox"/> 2×10^{-44} |
| <input type="checkbox"/> 2×10^{-22} | <input type="checkbox"/> 2×10^{-46} |
| <input type="checkbox"/> 2×10^{-24} | <input type="checkbox"/> 4×10^{-88} |

6. Givet tabellen

x	101	102	103	104	105
y	-4	0	3	3	5

(1p) a. Det interpolationspolynom som går genom samtliga punkterna i tabellen har gradtalet

2

3

4

5

(1p) b. Om vi interpolerar linjärt till $x = 104.3$ så får vi

3.0

3.3

3.6

3.9

7. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^3q}{dt^3} + 3\frac{dq}{dt}q^2 = \sin(t)$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir $n \dots$

det är omöjligt att säga

1.

2.

3.

4.

(1p) 8. En integral $I = \int_0^4 f(x)dx$ har beräknats approximativt med trapetsregeln $T(h)$ med steglängderna $h = 0.1$, $h = 0.05$ och $h = 0.01$. Följande resultat erhöles $T(0.1) = 2.850216$, $T(0.05) = 2.761023$, $T(0.01) = 2.731224$.

a. Felet i $T(0.1)$ är ungefär

det är omöjligt att säga

1

0.1

0.01

0.0001

(2p) 8b. Heuns metod för numerisk lösning av differentialekvationer har noggrannhetsordning 2. Detta betyder att ...

Felet avtar med antalet steg

Antalet korrekta decimaler kvadreras

Felet är proportionellt mot steglängden

Det globala felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat