KTH-CSC

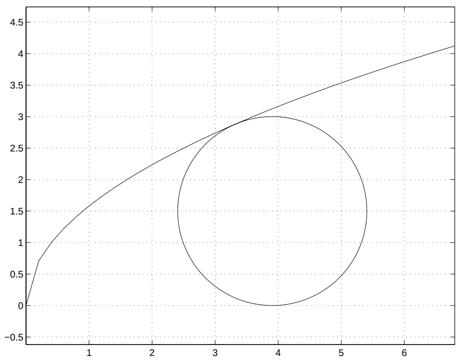
DN12- 12,14,15,40,41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk
Lördag 10-10-23

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40 A.

(12) **P1.** Följande icke-linjära ekvationssystem bestämmer centrumpunkten $(x_c, 2)$ och tangeringspunkten (x_p, y_p) för en cirkel med radien 2, som tangerar både x-axeln, och parabeln $x = 0.4y^2$.

$$(x_p - x_c)^2 + (y_p - 2)^2 = 4$$
$$x_p = 0.4y_p^2$$
$$2(x_p - x_c) + 2(y_p - 2)\frac{1}{0.8y_p} = 0$$

Formulera en algoritm i Matlab för att lösa problemet. Bifogad matlabrutin `minjac` får gärna användas. Goda startgissningar skall anges och redovisas. Då cirkeln bestämts skall den ritas upp tillsammans med överdelen av parabeln, se figuren (för annan, mindre cikel). Då cirkeln ritas är det lämpligt att använda polär form.



P2. Derivatan av funktionen $f(x)$ i punkten $x = 1.2$ har beräknats approximativt med en differensmetod med olika steglängder h. Följande resultat erhölls.

h	approx.
5.00e-02	2.0717
2.50e-02	2.0209
1.25e-02	2.0084
6.25e-03	2.0053

(6) **P2a.** Man kan gissa att metodens noggrannhetsordning är två. Använd detta till att från tabellen bestämma **en** bättre approximation till derivatavärdet, samt skatta felet i detta värde.

(6) **P2b.** Använd tabellvärdena till att visa att metoden verkligen har noggrannhetsordning två.

VÄND!

(11) **P3.** Givet differentialekvationsproblemet

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} (1-y^2)y, & -2 \le y \le 2 \\ -6 & y > 2 \\ 6 & y < -2 \end{cases}$$

Skriv ett Matlabprogram som löser ovanstående problem och ritar upp flera olika lösningsbanor i samma figur. Följande startvärden skall användas.

1.$y(0) = 0.5$ 2.$y(0) = 5$ 3.$y(0) = -0.5$ 4.$y(0) = -5$

Beräkna och skriv också ut $y_1(10) - y_2(10)$ och $y_3(10) - y_4(10)$ Här står index i i $y_i(10)$ för lösningen svarande mot startvärde nr i. Hur gör du för att bedöma resultatets noggranhet?

(7)**P4.a** Problemet nedan diskretiseras med steglängden $h = 0.25$ och centraldifferensapproximationer till derivatorna.

$$(1 + (\frac{dz}{dt})^2)\frac{d^2z}{dt^2} = z, \qquad z(0) = 1, \quad z(2) = 2$$

Diskretisera intervallet (hur många inre punkter blir det?) och inför lämpliga beteckningar samt formulera det icke-linjära ekvationssystem $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$ som erhålls.

(8)**P4.b** Skriv ett Matlabprogram som för steglängd $h = 2/(N+1)$, med valfritt N, formulerar och löser det ickelinjära ekvationssystemet med Newtons metod. Bifogad rutin `minjac` får användas. Skriv ut mellanresultat så iterationernas konvergens kan studeras och diskutera förväntade utskrifter. Beskriv hur du gör för att bedöma diskretiseringsfelet i lösningen?

Användbara Matlabrutiner:

```
---------------------------------------------------------
ODE45  Solve non-stiff differential equations, medium order method.
    [TOUT,YOUT] = ODE45(ODEFUN,TSPAN,Y0) with TSPAN = [T0 TFINAL] integrates
    the system of differential equations y' = f(t,y) from time T0 to TFINAL
    with initial conditions Y0. ODEFUN is a function handle. For a scalar T
    and a vector Y, ODEFUN(T,Y) must return a column vector corresponding
    to f(t,y). Each row in the solution array YOUT corresponds to a time
    returned in the column vector TOUT.

---------------------------------------------------------------
function jac=minjac(Fcn,z);
%beräknar en numerisk approximation jac till jakobianmatrisen till
%funktionen Fcn i punkten z
  N=length(z); F=feval(Fcn,z); jac=[]; stegtol=1.E-8;
  for i=1:N,
   z0=z;
   st=z0(i)*stegtol; if st==0, st=1.E-10; end
   z0(i)=z0(i)+st;
   jac=[jac ( feval(Fcn,z0)-F )/st];
  end
---------------------------------------------------------------
```