

DN12, 14, 15, 40, 41, 43 mfl
Tentamen i grundkurs i numeriska metoder
Del 2 (av 2)
Tisdag 2013-01-08, kl 10-13, inga hjälpmedel

Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng (max 4p).

Miniräknare är **ej** tillåten på denna tentamen. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses om inte annat anges beskrivning i Matlab. Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade, tex

$c = 0.5 \cdot 0.2^3 \cdot \cos(\pi/3)$ i stället för det uträknade $c = 0.002$

—000—

(0p) P0. Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (linje och termin: VT12 eller HT12) där poängen erhållits.

(17p) P1. Tomtemors julsinkesimulator

Den tidsberoende temperaturen i ytan kallas $T_y(t)$ och i mitten $T_m(t)$ och den konstanta ugnstemperaturen är $T_{ugn} = 125C$. Om tiden är t , och initialtemperaturen $T_0 = 20C$ så gäller enligt Tomtemors differentialekvationen (*):

$$\begin{aligned} dT_y/dt &= \alpha(T_{ugn} - T_y) + (T_m - T_y), & T_y(0) &= T_0 \\ dT_m/dt &= (T_y - T_m), & T_m(0) &= T_0 \end{aligned}$$

där parametern α för aktuell skinka och ugn blir 1.3 per timme. Uppgiften är att skriva ett MATLAB-program som 1) beräknar tiden t_{ut} när skinkans mitt uppnår temperaturen $T_{ut} = 72C$ och 2) plottar båda temperaturerna i $[0, t_{ut}]$.

a)(5p) Skriv en MATLAB-function `function dTdt = ham(T)` som beräknar tidsderivatorna enligt (*). Värdena för T_{ugn} och α tas som ovan.

b)(8p) Skriv ett MATLAB-program som med `ham` löser initialvärdesproblemet med Heuns Runge-Kutta-metod som definieras för $dy/dt = f(y)$ för steget från y_i till y_{i+1} med steglängd h av

$$k = hf(y_i); y_{i+1} = y_i + hf(y_i + k/2); t_{i+1} = t_i + h$$

Du får använda funktionen `ham` även om du inte gjort a). Stegningen avbryts när vid $i = n$, T_m första gången överstiger T_{ut} . t_{ut} skall sedan beräknas med linjär interpolation i tabellen över y_i

c)(2p) Beskriv med användning av de definierade storheterna ovan hur du uppskattar felet i det beräknade t_{ut}

d)(2p) Beskriv, med användning av lämplig notation, hur du bestämmer den osäkerhet i beräknat värde t_{ut} som följer av att α -värdet bara är känt med 10% relativt fel.

(17p) P2. Skinka och kurvanpassning

Man mäter vid tidpunkterna $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ skink-innertemperaturerna T_i , se tabell nedan. Ugnstemperaturen är konstant $T_{ugn} = 125C$. Skinkan ska ut när dess temperatur blir $T_{ut} = 72C$ och det blir vid tiden t_{ut} . Tre nissar använder olika algoritmer för bestämning av t_{ut} :

Nisse1 anser att $T(t)$ är ett förstgradspolynom $p(t)$ med $p(t_k) = T_k, k = n-1, n$; Vänd!

Nisse2 tror att $T(t)$ är förstgradspolynomet $q(t)$ som minstakvadratanpassats till alla data $(t_i, T_i), i = 1, 2, \dots, n$.

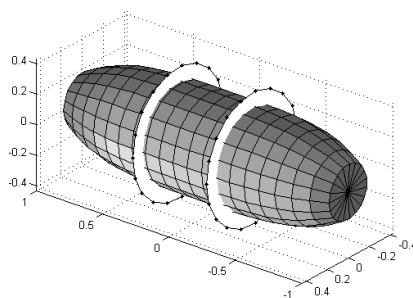
Nisse3 å sin sida tror att Tomtemors modell skulle ge $T(t) = T_{ugn} - c_1 e^{-c_2 t}$. Hen bestämmer genom listig omskrivning parametrarna c_1, c_2 som lösningar till ett *linjärt* minstakvadratproblem där alla data används.

a)(5p) Vad får Nisse1 för värde på t_{ut} ?

b)(7p) Vad får Nisse2 för värde på t_{ut} ? Tips: räkna tiden i 20-minutersenheter från kl. 18:00!

c)(5p) Gör Nisse3's omskrivning och ställ upp det linjära överbestämda system $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ som hen får. Ange matrisen $\mathbf{A}$ och högerledet $\mathbf{b}$.

$t, kl.$	17 : 20	17 : 40	18 : 20	18 : 40
T, C	30	42	58	65



Figur 1: Degrullen med snitt

(16p) P3. Julbak, kvadratur och ekvationslösning

En degrulle ska delas i tre delar med samma volym med två snitt $v, h; v < h$ vinkelräta mot x -axeln. Rullen uppstår när kurvan

$$y(x) = \frac{1}{3} \cos(x^2), -1 < x < 1$$

roteras runt x -axeln. Volymen av ett avsnitt (a, b) blir då $V(a, b) = \pi \int_a^b y^2(x) dx$.

a)(2p) Motivera ekvationen $f(v) = 3V(-1, v) - V(-1, 1) = 0$ och varför $v = -h$.

b)(2p) Ange $\frac{df}{dv}$

c)(7p) Skriv ett MATLAB-program som bestämmer v . Du får använda (utan att skriva den) `function intval = quad(f,a,b,tol)` som beräknar en approximation `intval` till $\int_a^b f(x) dx$ med fel $< \text{tol}$. `f` är en funktion som evaluerar integranden. Den ska Du ska skriva och använda på rätt sätt. Programmet ska rita en figur med konturen $y(x)$ till degrullen och linjer som visar var v och h är. Du får välja ekvationslösningsmetod fritt och ska skriva den i MATLAB. (*inte* MATLABs `fzero` !) Den ger successiva värden $v_k, k = 0, 1, 2, \dots$ Välj startvärde v_0 och motivera valet. Välj värden på `tol` och ϵ och stoppa iterationen vid v_n när $|v_n - v_{n-1}| < \epsilon$.

d)(5p) Ange en övre gräns för felet i v_n som ett uttryck som beror på `tol`, ϵ , och den ekvations-lösningsmetod du valt.

Lycka till!