P1

a)

```
function dTdt = ham(T)
a = 1.3; Tugn = 125;
dTdt = [a*(Tugn-T(1))+(T(2)-T(1));T(1)-T(2)];
```

b)

```
T0 = 20; Tut = 72; h = 0.1;
T = [T0; T0]; t = 0;
Tout = T'; tout = t;
while T(2) < Tut
    k = h*ham(T); T = T + h*ham(T+k/2); t = t+h;
    Tout = [Tout;T']; tout = [tout;t ];
end
% compute tut
tut = tout(end-1) +. . .
 h/(Tout(end,2)-Tout(end-1,2))*(Tut-Tout(end-1,2));
% plot
plot(tout,Tout(:,1),'og',tout,Tout(:,2),'+m');
plot([tut tut],[0 Tout(end,2)],'r')
```

c) Felen från Heuns metod och linjär interpolation blir båda $O(h^2)$. Men det blir också olika tider som slingan slutar så felet i `tut` blir inte säkert $O(h^2)$ och extrapolation kommer inte säkert att fungera. Alltså får man, precis som med ode45, beräkna tut(h) för en uppsättning h-värden, t ex

tut(h), tut(h/2), tut(h/4),…, tut($h/2^n$)

se hur det konvergerar och uppskatta felet i tut($h/2^n$) med abs(tut($h/2^n$) - tut($h/2^{n-1}$))

d) tut beror på h och α. Välj steglängd h* efter experimenten i c) och beräkna sedan

t1 = tut(h*, 1.1α) och t2 = tut(h*,0.9α).

Svaret blir då

tut = (t1+t2)/2 plus minus (abs(t1-t2)/2)

P2

a) Nisse1 får

$T(t) = T_n + (T_n-T_{n-1})/(t_n-t_{n-1})\ (t-t_n)$

och således

$tut = t_n + (Tut - T_n)\ (t_n-t_{n-1})/\ (T_n-T_{n-1})$ = 18:40 + (72-65)(1/3)/(65-58)*20 (min) = 19:00

b) Nisse2 får (tm = 18:00)

T(t) = a + b (t – tm)   och tut = tm + (Tut –a)/b

där

t-tm:	-2	-1	1	2
T	30	42	58	65

med normalekvationer

4 a + 0 b = 195 : a = 195/4; 0 a + 10 b = 86: b = 8.6

och tut = 18:00 + (72 – 48 3/4)/8.6*20 (min) =…= 18:00 + 2.7*20 =18:54

c) Nisse3 får, med samma tideräkning som Nisse2,

$$c_1 e^{-c_2 t_i} = T_{ugn} - T_i;$$
$$a + bt_i = \ln(T_{ugn} - T_i)$$
$$a = \ln c_1, b = -c_2$$

Samma koefficientmatriser som Nisse2 men annat högerled:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \ln 95 \\ \ln 83 \\ \ln 67 \\ \ln 60 \end{pmatrix}$$

P3

a) Vänstra delen har volym $V(-1, v)$ och hela rullen $V(-1,1)$. $y(x) = y(-x)$ varför snittet h till höger om $x = 0$ blir $= -v$.

b) $\dfrac{df}{dv} = 3\dfrac{dV}{dv} = 3\pi y^2(v)$

c)

```
tol = 1e-6; epsil = 1e-6;
y = @(x) 1/3*cos(x.^2);          % Kontur
S = @(x) pi*y(x).^2;             % Tvärsnittsyta
VV = quad(S,-1,1,tol);           % volym av hela rullen
f  = @(v) 3*quad(S,-1,v,tol)-VV; %
df = @(v) 3*S(v);                % derivata df/dv
% Newton
v = -0.3; dv = 2*epsil;
while abs(dv) > epsil
    dv = f(v)/df(v);v = v - dv;
    disp(v);
end
xpl = linspace(-1,1,100); plot(xpl,y(xpl)); hold on; axis equal;
plot([ v  v],[0 1],'r');plot([-v -v],[0 1],'g')
```

d) Beroende på vald metod får man en feluppskattning $E_v(\varepsilon)$ vid lösning av en ekvation; Newton eller sekant-metoden ger t ex $E_v(\varepsilon) < |v_n - v_{n-1}| < \varepsilon$, pessimistisk, och Newton, mera realistisk om följden $\{v_n\}$ är ”regelbunden”

$$E_v(\varepsilon) < K\,|v_n - v_{n-1}|^2 < \varepsilon \text{ där } K = |v_n - v_{n-1}|/\,|v_{n-1} - v_{n-2}|^2$$

Men vi har löst fel ekvation, nämligen $F(v) = f(v) + g(v) = 0$ där $|g| < 3$ tol. Det därav följande felet uppskattas med

$$|g(v)\,/F'(v)| \text{ ung.} = |g(v)\,/f'(v)|$$

så totalt:

$$\textbf{Felet} < E_v(\varepsilon) + \text{tol}/(\pi\, y^2(v))$$