KTH-CSC

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243

Onsdag 17/3 2010, kl 14-17

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

(15p) **1.** Givet följande icke-linjära ekvationssystem:

$$x^3 + 10x = y + 5, \qquad x + y^3 = 10y - 1 \tag{$*$}$$

a) (3p) Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för ekvationssystemet.

b) (4p) Motivera varför $x = 0.5, y = 0.15$ är en bra startgissning.

c) (4p) Formulera det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen.

d) (4p) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-program som löser $(*)$ med Newtons metod, och med fel mindre än 10^{-6} i varje komponent av lösningen. För varje iteration ska bägge komponenterna och deras korrektioner skrivas ut.

(20p) **2.** Givet följande differentialekvationsproblem

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - C(\frac{dy}{dt})^2$$

Parametrarna m, g och C har alla positiva värden.

a) (3p) Skriv om differentialekvationen som ett system på vektorform av första ordningen.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

b) (12p) Antag att vi har begynnelsevärden $y(0) = 1$ och $\frac{dy}{dt}(0) = 1$. Vi vill beräkna den tidpunkt T då $y(T) = 0$.
Skissera en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-prgram, som med Eulers metod ger en lösningskurva (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), ... fram till det t_i-värde, där $y_i < 0$ för första gången. Detta t_i-värde ger en grov approximation till T. Som siffervärden på parametrarna används: $m = 1$, $g = 9.81$, och $C = 0.03$. Steglängden h väljs till $h = 0.01$. Lösningskurvan ska plottas.

c) (5p) Utöka algoritmen i b) så att tidpunkten T bestäms noggrannare med hjälp av linjärinterpolation genom att använda de två sista punkterna på lösningskurvan i b).

(15p) **3.** Betrakta sambandet

$$\int_0^1 \frac{e^{-kx^2}}{1 + x^2} dx = 0.75$$

Strukturera en algoritm för numerisk beräkning av parametern k. Vilka delproblem behöver lösas och vilka numeriska metoder är lämpliga? Inför lämpliga beteckningar och formulera en algoritm. Programkod behövs EJ! Diskutera hur trunkeringsfelen i metoderna bidrar till en felgräns för det som söks.