Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243

Lördag 19/3 2011, kl 9-12

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

1. Ekvationslösning

Givet ekvationen $e^x + ax = 0.5$, där $a > 0$ är en parameter.

(2) a. Motivera med en geometrisk figur eller på annat sätt att ekvationen har endast en rot α och att den är negativ.

(3) b. Formulera Newtons metod för ekvationen och beskriv en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som för $a = 1$ beräknar roten α med 4 korrekta decimaler utifrån startvärdet $x_0 = -0.2$.

(3) c. Om ekvationen skrivs om på formen $x = 0.5 - e^x$ kan fixpunktsmetoden användas. Formulera metoden och avgör om den kommer att konvergera eller inte. Startvärdet x_0 i b) är en hyfsad approximation till roten. $e^{x_0} \approx 0.8$.

(4) d. Antag att parametern a har en osäkerhet: $a = 1.0 \pm 0.05$. Beskriv hur osäkerheten E_α i α kan beräknas och utöka algoritmen i uppgift b) så att även α's osäkerhet beräknas.

2. Derivata-approximation

Givet en tabell över en funktion $y = f(x)$, där x_i-värdena är givna ekvidistant i intervallet $[0, 1]$.

i:	1	2	3	4	5
x_i:	0	0.25	0.50	0.75	1
y_i:	0	0.24	0.46	0.68	0.87

Vi vill beräkna en approximation till derivatan i intervallets vänstra ändpunkt, dvs $f'(0)$.

(3) a. Ange en differensformel med noggranhetsordningen 1 för beräkning av $f'(0)$. Beräkna två approximationer till derivatan $f'(0)$ genom att tillämpa formeln på tabellvärdena för steglängderna $h = 0.25$ och $h = 0.5$.

(3) b. För att få högre noggrannhetsordning kan man alternativt använda differensformeln

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}$$

Använd denna formel för att beräkna $f'(0)$ med användning av tabellvärdena, för $h = 0.25$ och $h = 0.5$.

(3) c. Antag att man vet det exakta svaret: $f'(0) = 1.01$. Beräkna trunkeringsfelen för de två approximativa värden du räknat fram i a). Verifiera att formeln i a) har noggranhetsordningen 1. - Gör samma sak för de två approximativa värden du räknat fram i b) och avgör vilken noggrannhetsordning formeln i b) har.

(3) d. Använd Taylorutveckling för att bestämma noggrannhetsordningen för formeln i b).

3. Följande begynnelsevärdesproblem är givet

$$\ddot{u} + \dot{u} + u = t,\ u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0, \quad (*) \quad , \text{där } \dot{u} = \frac{du}{dt}, \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

(2) **a.** Skriv om differentialekvationen $(*)$ som ett system på vektorform av två första ordningens differentialekvationer. Ange även begynnelsevektorn.

(4) **b.** Formulera Eulers metod (även kallad framåt Euler) för systemet i a) och beräkna sedan $\dot{u}(1)$ med användning av steglängden $h = 0.5$.

(8) **c.** Följande integral är kopplad till problemet $(*)$:

$$z(t) = \int_0^t ((u(s))^2 + (\dot{u}(s))^2) ds$$

Skissera en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som 1) löser differentialekvationen på tidsintervallet $[0, 10]$ t ex med Matlabs ODE-lösare ode45, därefter beräknar $z(t)$ på samma tidsintervall samt slutligen plottar $u(t)$ och $z(t)$ i samma diagram.
Ledning: Tänk på trapetsregeln, men med variabelt steg.

4. Betrakta sambandet

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-kx^2}}{1 + x^2} dx = 0.5$$

Strukturera en algoritm för numerisk beräkning av parametern k.

(3) **a.** Problemet att bestämma k kan ses som en syntes av numeriska metoder. Vilka numeriska metoder är lämpliga?

(3) **b.** Parameters k måste bestämmas med iteration. Ange någon metod att hitta ett startvärde till k.

(3) **c.** Inför lämpliga beteckningar och formulera en algoritm. Programkod behövs EJ!

(3) **d.** Vilka trunkeringsfel påverkar noggrannheten i det numeriskt bestämda k-värdet? Diskutera hur trunkeringsfelen i metoderna bidrar till en felgräns i k-värdet.