

DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243

Lördag 22/10 2011, kl 9-12

**DEL 2** Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser: 10-19:D, 20-29:C, 30-39:B, 40-50:A

- (6) **P1.** Begreppet "lokal approximation med rät linje" är en bakomliggande idé till många numeriska metoder. Klargör för följande metoder vad det är för linje som avses och var den lokala approximationen med rät linje görs. Förklara begreppen *kortfattat* och med en figur som visar approximationsprincipen.

- a) Trapetsregeln för beräkning av en bestämd integral  $\int_a^b f(x)dx$   
 b) Eulers metod för lösning av en differentialekvation  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ,  $y(a) = y_0$   
 c) Sekantmetoden för lösning av ekvationen  $f(x) = 0$ .

- (12) **P2.** En takkupol har formen av ytan på en halvsfär. Genom mätningar av höjden  $z_i$  i olika punkter  $(x_i, y_i)$  vill man bestämma mittpunkten  $(a, b, c)$  och radien  $R$  i sambandet

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Följande mätvärden är givna:

$x$	5	7	8	10	12	14	15
$y$	5	2	13	7	11	3	12
$z$	10	8	10	13	12	8	9

Skissera Gauss-Newtons algoritmen, gärna med ett MATLAB-program, för minstakvadratanpassning av mittpunktskoordinaterna och radien till de givna mätvärdena. Hur erhålles ett bra startvärde för iterationerna?

- (16) **P3.** Givet differentialekvationen

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 1, \quad 1 \leq x \leq 4$$

- (8) a) Antag att begynnelsevärden är givna som  $y(0) = 1, y'(0) = 0.5$ . Skissera ett MATLAB-program som löser differentialekvationen på det givna intervallet. Basera programmet på Eulers metod, steget  $h$ . Lösningsskurvan  $y(x)$  ska ritas upp i en graf och värdet på  $y(4)$  ska skrivas ut. Slutligen ska integralen

$$\int_0^4 y(x)dx$$

beräknas med trapetsregeln och skrivas ut.

- (8) b) Antag att randvärden är givna som  $y(0) = 1, y(4) = -1$ . För ett givet steg  $h$ , definiera ett nät  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , där  $Nh = 4$ . Approximera derivatorna med centraldifferenser:

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}, \quad y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

Skissera det ekvationssystem  $Ay = b$  som erhålles då finita differensmetoden används för att approximera differentialekvationen. Vilken struktur och vilken dimension har matrisen  $A$ ? MATLAB-program begärs EJ.

- (16) **P4.** Givet följande ekvationssystem

$$x^2 + y^2 = 2.12, \quad y^2 - x^2y = 0.03 \quad (*)$$

Ekvationssystemet kan lösas antingen genom att använda Newtons metod direkt på systemet sådant det är givet eller genom att eliminera  $x$ . I det senare alternativet erhålles en tredjegrads ekvation i  $y$ , som kan lösas med Newton-Raphsons metod.

- (8) a) Genomför EN iteration med Newtons metod på systemet (\*) med startvärdet  $x_0 = 1, y_0 = 1$ . Redovisa speciellt iterationsformeln, ekvationssystemet för korrektionen, korrektionen uträknad samt nästa iterat.
- (2) b) Med startvärdet  $x_0 = 0, y_0 = 0$  fungerar inte Newtons metod. Förklara varför!
- (6) c) Eliminera  $x$  ur ekvationerna och ange den tredje gradsekvation i  $y$  som erhålles. Gör EN iteration med Newton-Raphsons metod, startvärde  $y_0 = 1$ . Redovisa även här iterationsformel, korrektionen uträknad samt nästa iterat.