KTH-CSC

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243
Fredag 19/10 2012, kl 14-17

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

(15p) **1.** Givet följande icke-linjära ekvationssystem:

$$e^{x-y} = 1.1 - y, \qquad 2e^{x+y} = 0.9 + x \tag{$*$}$$

a) (4p) Inför lämpliga beteckningar, ange jacobianen och formulera Newtons metod för detta ekvationssystem.

b) (4p) Givet startvärdena $x = 0, y = 0$. Formulera och lös det linjära ekvationssystem som bildas i den första iterationen.

c) (7p) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-program som löser ($*$) med Newtons metod, och med fel mindre än 10^{-6} i varje komponent av lösningen. Skriv ut en tabell som för varje iteration skriver en rad innehållande bägge komponenterna och deras korrektioner. Svara på frågan: Hur ser man i tabellen att konvergensen är kvadratisk?

(20p) **2.** Givet följande differentialekvationsproblem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\frac{dy}{dt})^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

a) (3p) Skriv om differentialekvationen som ett system på vektorform av första ordningen.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

Ange både högerledet $\mathbf{f}$ och begynnelsevärdet $\mathbf{u}_0$.

b) (12p) Vi vill beräkna den tidpunkt T då $y(T) = 0$.
Skissera en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-prgram, som med Eulers metod ger en lösningskurva (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), ... fram till det t_i-värde, där $y_i < 0$ för första gången. Detta t_i-värde ger en grov approximation till T. Steglängden h väljs till $h = 0.001$. Lösningskurvan $y(t)$ erhållen med Eulers metod ska plottas.

c) (5p) Utöka algoritmen i b) så att tidpunkten T bestäms noggrannare med hjälp av linjärinterpolation genom att använda de två sista punkterna på lösningskurvan i b).

(15p) **3.** Givet randvärdesproblemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} + kx^2y + 1 = 0, \quad y(0) = 0, y(2) = 1$$

där k är en parameter.

a) (5p) Antag att $k = 1$. Inför lämpliga beteckningar, ställ upp en differensapproximation till problemet, välj en steglängd h och formulera det ekvationssystem som ger den numeriska lösningen. Ange speciellt sambandet mellan steglängden h och antalet ekvationer n. MATLAB-program krävs ej.

b) (10p) Vi vill nu beräkna det k-värde för vilket $y(1) = 2$. Diskutera lämpliga metoder som behövs för att lösa problemet. MATLAB- program krävs ej, men du ska komma fram till en algoritm som med ord och formler beskriver hur k erhålles och som kan översättas till ett MATLAB-program.